INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXII. BAND ERSTES HEFT 1954

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 10,80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. E. **Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnertstr. 12
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N.W. 1.

Inhalt:

Seite

Stahl, K., Über die Lösung ebener Elastizitätsaufgaben in komplexer und hyperkomplexer Darstellung. Mit 3 Textabbildungen 1

Truckenbrodt, E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern. Mit 10 Textabbildungen 21

Slibar, A., und *K. Desoyer*, Zur Erzielung optimaler Wirkung bei Pendel-Schwingungstilgern. Mit 4 Textabbildungen 36

Graffi, D., Über den Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastischen Körper 45

Krettner, J., Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten. Mit 1 Textabbildung 47

Grim, O., Zur Stabilität der periodischen, erzwungenen Rollschwingungen eines Schiffes. Mit 6 Textabbildungen 55

Müller, W., Zur Theorie der Vierpilzplatte. Mit 8 Textabbildungen 60

INGENIEUR-ARCHIV

XXII. BAND ERSTES HEFT 1954

Über die Lösung ebener Elastizitätsaufgaben in komplexer und hyperkomplexer Darstellung.

Von K. Stahl.

1. Einleitung. Bei der Behandlung ebener Elastizitätsaufgaben sind zwei Verfahren bisher weniger beachtet worden, obwohl sie gegenüber der üblichen Methode mit Hilfe der *Airy*schen Spannungsfunktion den Vorteil einer wesentlich kürzeren und übersichtlicheren Darstellung bieten.

G. Kolossoff[1] leitet die Spannungskomponenten und Verschiebungen aus zwei Funktionen einer komplexen Veränderlichen ab. Darauf aufbauend hat *N. Muschelišvili*[2] einen sehr allgemeinen Lösungsweg für die verschiedenen Randwertaufgaben über die konforme Abbildung auf den Einheitskreis angegeben. In den letzten Jahren ist eine ganze Reihe bemerkenswerter Aufgaben in komplexer Darstellung gelöst worden[3]. *A. E. Green* und *W. Zerna*[4] verwenden die komplexen Spannungsfunktionen in einer umfassenden Darstellung der Elastizitätstheorie. Unabhängig von *N. Muschelišvili* sind dieselben Funktionen auch von *A. C. Stevenson*[5] entwickelt und verwendet worden.

Die zweite Methode, die auf *L. Sobrero*[6] zurückgeht, gestattet, die Spannungen als Elemente einer Funktion einer hyperkomplexen Veränderlichen anzugeben. Hiermit ist neuerdings von *K. Schmidt*[7] eine Reihe von Aufgaben des ebenen Spannungszustandes behandelt worden.

Die vorliegende Arbeit[8] weist die enge Verwandtschaft dieser beiden Methoden nach und gibt Transformationsformeln an, die ein Ergebnis in der einen Darstellung leicht in die andere überführen lassen. Anhand der durchgeführten Beispiele lassen sich Anwendungsmöglichkeiten und Vorteile der beiden Methoden miteinander vergleichen.

2. Die komplexen und hyperkomplexen Spannungsfunktionen. Die Probleme des ebenen Spannungs- und Formänderungszustandes in einem homogenen, elastisch-isotropen Medium lassen sich nach *Airy* auf die Aufgabe zurückführen, eine Funktion $U(x, y)$ zu bestimmen, die bei Abwesenheit von Massenkräften in dem vorgegebenen Gebiet der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta U = 0 \tag{1}$$

genügt und gewisse Randbedingungen erfüllt. Die Spannungskomponenten, in üblicher Weise mit σ_x, σ_y und τ_{xy} bezeichnet, ergeben sich dann zu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}. \tag{2}$$

Durch

$$U(x, y) = V(z, \bar{z}) \tag{3}$$

---

[1] *G. Kolossoff*. Z. Math. Phys. 62 (1914), S. 384.

[2] *N. I. Muschelišvili*, Math. Ann. 107 (1933), S. 282; Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 264; Einige Grundaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie, 3. Aufl. Moskau 1949.

[3] *B. L. Mincberg*, Prikl. Math. Mekh. 12 (1948), S. 415 (russ.); — *D. V. Vainberg*, Prikl. Math. Mekh. 13 (1949), S. 151 (russ.); — *G. N. Polozhii*, Prikl. Math. Mekh. 13 (1949), S. 297 (russ.); Dokl. Akad. Nauk. SSSR 73 (1950), S. 49 (russ.); — *S. E. Birmann*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 62 (1948), S. 187 (russ.); — *C. A. M. Gray*, Quart. Journ. Mech. appl. Math. 4 (1951), S. 444.

[4] *A. E. Green* u. *W. Zerna*, Theoretical Elasticity (noch nicht veröffentlicht).

[5] *A. C. Stevenson*, Philos. Mag. 34 (1943), S. 766; Proc. Roy. Soc. A 184 (1945), S. 129 u. 218.

[6] *L. Sobrero*, Memorie della Reale Academia d'Italia 6 (1934/35), S. 1; Theorie der ebenen Elastizität, Hamburger Math. Einzelschr., Heft 17, Leipzig 1934.

[7] *K. Schmidt*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 324.

[8] Dissertation Hannover 1953 (D 89); Hauptberichter Prof. Dr.-Ing. *O. Flachsbart*, erster Berichter: Dozent Dr.-Ing. *W. Zerna*, zweiter Berichter: Prof. Dr.-Ing. *E. Pestel*. Die Arbeit entstand am Festigkeitslaboratorium der TH Hannover (Leiter Prof. Dr.-Ing. *O. Flachsbart*).

werde eine Funktion der beiden komplexen Variablen $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ definiert, die nur reelle Werte annehmen kann. Für diese Variablen gilt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, & \frac{\partial}{\partial y} &= i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), \\ 2\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, & 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und daher

$$\Delta U = 4\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial \bar{z}}.$$

Aus (1) folgt, daß ΔU eine harmonische Funktion ist und somit auch als Realteil einer Funktion der Veränderlichen z etwa wie folgt [1] geschrieben werden kann:

$$\Delta U = 4\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial \bar{z}} = \Re\mathrm{e}\,[4\,\Phi(z)] = 2\,[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})]. \tag{5}$$

Hier ist $\Phi(z)$ eine Funktion von z und $\bar{\Phi}(\bar{z})$ die dazu konjugiert komplexe Funktion. Durch Integration von (5) bezüglich z ergibt sich mit der Bezeichnung $\varphi(z) = \int \Phi(z)\,dz$

$$4\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = 2\,[\varphi(z) + z\,\bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})], \tag{6}$$

wobei $\bar{\psi}(\bar{z})$ eine Funktion von $\bar{z}$ darstellt, die als Integrationsfunktion hinzutritt. Eine Integration von (6) bezüglich $\bar{z}$ liefert mit $\bar{\psi}_2(\bar{z}) = \int \bar{\psi}(\bar{z})\,d\bar{z}$

$$4\,V = 2\,[\bar{z}\,\varphi(z) + z\,\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\psi}_2(\bar{z}) + \psi_2(z)] = 4\,\Re\mathrm{e}\,[\bar{z}\,\varphi(z) + \psi_2(z)].$$

Hierbei muß $\psi_2(z)$, die zu $\bar{\psi}_2(\bar{z})$ konjugiert komplexe Funktion, als Integrationsfunktion hinzutreten, da $V(z, \bar{z})$ voraussetzungsgemäß nur reeller Werte fähig ist. Mit Hilfe von (2), (3), (4) und mit der Bezeichnung $\Psi(z) = \psi'(z)$ lassen sich nun leicht die folgenden Spannungskombinationen herleiten:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial \bar{z}} = 2\,[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})], \tag{7a}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} = 4\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2\,[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)]. \tag{7b}$$

Aus diesen Kombinationen können die Spannungen selbst in einfacher Weise gewonnen werden.

Die Verschiebungen in Richtung der x- und y-Achse seien mit u und v bezeichnet. Im Falle des ebenen Formänderungszustandes geben bekanntlich die Gleichungen [2]

$$\left.\begin{aligned} 2\,G\frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y), \\ 2\,G\frac{\partial v}{\partial y} &= \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y), \\ G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &= \tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

die Verknüpfung der Verschiebungen mit den Spannungen an. Dabei ist mit G der Schubmodul und mit ν die Querzahl bezeichnet. Zur Abkürzung sei die Verdrehung eines Scheibenelementes

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \tilde{\omega}$$

gesetzt. Die Gleichungen (8) sind gleichwertig mit

$$2\,G\frac{\partial(u + i\,v)}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x - 2\,i\,\tau_{xy}),$$

$$2\,G\frac{\partial(u + i\,v)}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - 2\,\nu)(\sigma_x + \sigma_y) - 2\,G\,i\,\tilde{\omega},$$

---

[1] Hier wie auch im folgenden werden die von *N. I. Muschelišvilli* eingeführten Bezeichnungen benutzt.

[2] Vgl. z. B. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. I, S. 108, 2. Aufl. Berlin 1953.

wie durch (4) nachzuweisen ist. Durch Vergleich mit (7) folgt

$$2\,G\frac{\partial(u+i\,v)}{\partial\bar{z}} = -\,2\,\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,, \tag{9a}$$

$$2\,G\frac{\partial(u+i\,v)}{\partial z} = (1-2\,\nu)\,2\,\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\bar{z}} - 2\,G\,i\,\tilde{\omega}\,. \tag{9b}$$

Die Integration von (9a) bezüglich $\bar{z}$ ergibt

$$2\,G\,(u+i\,v) = -\,2\,\frac{\partial V}{\partial\bar{z}} + \tilde{\varphi}\,(z)\,, \tag{10}$$

wobei $\tilde{\varphi}\,(z)$ eine Funktion von z darstellt, die als Integrationsfunktion hinzutritt. Eine Differentiation von (10) nach z liefert

$$2\,G\frac{\partial(u+i\,v)}{\partial z} = -\,2\,\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\bar{z}} + \tilde{\varphi}'(z)\,,$$

woraus sich durch Vergleich mit (9b)

$$\tilde{\varphi}'(z) = (4-4\,\nu)\frac{\partial^2 V}{\partial\bar{z}\,\partial z} - 2\,G\,i\,\tilde{\omega} \tag{11}$$

ergibt. Mit Hilfe von (5) kann nun die Funktion $\tilde{\varphi}\,(z)$ bestimmt werden:

$$\tilde{\varphi}'(z) = (4-4\,\nu)\,\Phi(z)\,, \quad \tilde{\varphi}\,(z) = (4-4\,\nu)\,\varphi\,(z)\,. \tag{12}$$

Durch Einsetzen von (6) und (12) in (10) ergeben sich die Verschiebungen mit $\varkappa = 3-4\,\nu$ zu

$$2\,G\,(u+i\,v) = \varkappa\,\varphi\,(z) - z\,\bar{\Phi}\,(\bar{z}) - \bar{\psi}\,(\bar{z}) \tag{13}$$

für den Fall des ebenen Formänderungszustandes. Die Ausgangsgleichungen für den ebenen Spannungszustand haben die Form der Gleichungen (8), es ist lediglich ν durch $\nu/(1+\nu)$ zu ersetzen. Dementsprechend gilt Gleichung (13) für den ebenen Spannungszustand, wenn $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ gesetzt wird.

Mit den hier gegebenen Formeln ist das ebene Problem der Elastizitätstheorie auf die Aufgabe zurückgeführt, die in dem vorgegebenen Bereich analytischen Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ zu bestimmen, die auf dem Rande gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen.

So wie die Elemente einer Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + i\,y$ auf Grund der Beziehung $1 + i^2 = 0$ der Potentialgleichung genügen, so erfüllen die Elemente einer Funktion der hyperkomplexen Variablen $s = x + j\,y$ die Bipotentialgleichung, wenn für j

$$(1+j^2)^2 = 0 \tag{14}$$

gefordert wird. Die imaginäre Einheit i ist dann durch

$$i = \frac{1}{2}\,(3\,j + j^3) \tag{15}$$

mit der hyperkomplexen Konstanten j verknüpft.

Eine Funktion von s kann in der Form

$$f(s) = a + j\,b + j^2\,c + j^3\,d \quad (a, b, c, d \text{ reell}) \tag{16}$$

geschrieben werden, da (14) erlaubt, alle höheren Potenzen von j durch die ersten vier auszudrücken. Es kann nun gezeigt werden [1], daß durch

$$\sigma_x \equiv -\,c, \quad \sigma_y \equiv a, \quad \tau_{xy} \equiv d \tag{17}$$

die Spannungskomponenten mit den Elementen einer hyperkomplexen Spannungsfunktion zu identifizieren sind.

Damit ist andererseits das ebene Problem der Elastizitätstheorie auf die Aufgabe zurückgeführt, die in dem vorgegebenen Bereich analytische Funktion $f(s)$ zu bestimmen, die auf dem Rande gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllt.

3. Allgemeine Eigenschaften der Spannungsfunktionen. a) Transformationsformeln. Nach *T. Levi-Civita* kann jede hyperkomplexe Zahl und damit auch jeder Wert, den die Spannungsfunktion $f(s)$ annimmt in der Form

$$f(s) = \alpha + (1+j^2)\,\beta \tag{18}$$

[1] *K. Schmidt*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 326.

durch zwei komplexe Zahlen $\alpha = \alpha' + i\,\alpha''$ und $\beta = \beta' + i\,\beta''$ dargestellt werden. Die Anwendung von (15) und (14) führt dann zu

$$f(s) = \alpha' + \beta' + j\frac{3\,\alpha'' + 2\,\beta''}{2} + j^2\,\beta' + j^3\frac{\alpha'' + 2\,\beta''}{2} \tag{19}$$

in der Form von (16), und mit (17) ergeben sich daraus die einfachen Beziehungen

$$\sigma_x + \sigma_y = \Re\mathrm{e}\,[\alpha], \tag{20a}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} = \alpha + 2\,\beta \tag{20b}$$

für die oben betrachteten Spannungskombinationen. Im folgenden sei vorausgesetzt, daß sich die hyperkomplexe Spannungsfunktion in eine *Laurent*sche Reihe entwickeln läßt, also als

$$f(s) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r\,s^r + (1 + j^2)\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \beta_r\,s^r \tag{21}$$

geschrieben werden kann, wobei die hyperkomplexen Konstanten nach *T. Levi-Civita* durch die komplexen Konstanten α_r und β_r ausgedrückt sind. Diese Voraussetzung ist in den praktischen Anwendungen so gut wie immer erfüllt. Durch

$$s = z\left[1 + (1 + j^2)\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{z}}{z} - 1\right)\right] \tag{22}$$

sind hyperkomplexe und komplexe Variable miteinander verknüpft und die Anwendung des binomischen Satzes liefert hieraus

$$s^r = z^r\left[1 + (1 + j^2)\frac{r}{4}\left(\frac{\bar{z}}{z} - 1\right)\right]$$

für die Potenzen von s. Damit wird (21) zu

$$f(s) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r\,z^r + (1 + j^2)\left[\frac{1}{4}(\bar{z} - z)\sum_{r=-\infty}^{+\infty} r\,\alpha_r\,z^{r-1} + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \beta_r\,z^r\right].$$

Der Vergleich mit (18) zeigt, daß α eine Funktion von z allein ist, und daher kann aus (20a) und (7a) geschlossen werden

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_r\,z^r = \alpha = 4\,\Phi(z).$$

Eine Differentiation dieser Gleichung liefert

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} r\,\alpha_r\,z^{r-1} = 4\,\Phi'(z).$$

Damit ist nun unter Benutzung von (18), (20b) und (7b) analog dem Vorhergehenden zu schließen:

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \beta_r\,z^r = \Psi(z) - 2\,\Phi(z) + z\,\Phi'(z).$$

Diese Ergebnisse erlauben es, durch

$$f(s) = 4\,\Phi(z) + (1 + j^2)\,[\Psi(z) - 2\,\Phi(z) + \bar{z}\,\Phi'(z)] \tag{23a}$$

einen Zusammenhang zwischen der hyperkomplexen und den komplexen Spannungsfunktionen herzustellen. Werden unter $\Phi(s)$, $\Phi'(s)$ und $\Psi(s)$ diejenigen Funktionen verstanden, die sich aus $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ und $\Psi(z)$ ergeben, wenn z durch s ersetzt wird, so kann die Gleichung (21) mit den obigen Beziehungen auch in der Form

$$f(s) = 4\,\Phi(s) + (1 + j^2)\,[\Psi(s) - 2\,\Phi(s) + s\,\Phi'(s)] \tag{23b}$$

geschrieben werden.

Die Gleichung (23a) zeigt besonders anschaulich die enge Verwandtschaft der beiden Methoden und Gleichung (23b) gibt die Möglichkeit, ein Ergebnis in der einen Darstellung leicht in die andere zu transformieren. Von Nutzen ist außerdem die Beziehung

$$F(s) = \int f(s)\,ds = 4\,\varphi(z) + (1 + j^2)\,[\psi(z) - 3\,\varphi(z) + \bar{z}\,\Phi(z)], \tag{24}$$

die sich aus (23b) durch Integration und Einsetzen von (22) ergibt.

b) Umlaufrelationen. Es sei AB ein Stück einer Kurve, die im Innern des von dem betrachteten Körper eingenommenen Gebietes verläuft (Abb. 1), und dX, dY seien die in x- und y-Richtung von der rechten Seite her auf das Bogenelement dz wirkenden Kräfte. Hier ist, wie auch weiterhin, unter Kraft der auf die Längeneinheit der Dicke entfallende Anteil der Gesamtkraft zu verstehen. Dann verlangt das Gleichgewicht

$$dX + i\,dY = (\sigma_x\,dy - \tau_{xy}\,dx) + i\,(\tau_{xy}\,dy - \sigma_y\,dx).$$

Diese Gleichung geht unter Beachtung von (2) und (4) über in

$$dX + i\,dY = d\left(\frac{\partial U}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -2\,i\,d\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{z}}\right).$$

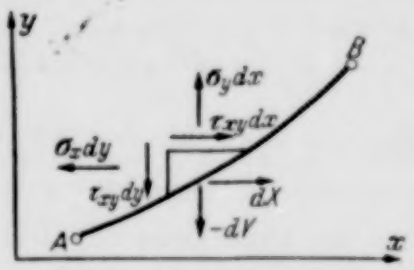

Abb. 1.
Zum Gleichgewicht am Bogenelement.

Das positive drehende Moment dieser Kräfte bezogen auf den Koordinatennullpunkt ist dann

$$x\,dY - y\,dX = -\,\Re\mathrm{e}\left[d\left(2\,\bar{z}\,\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} - V\right)\right].$$

Ist C eine ganz im Innern des Bereiches liegende geschlossene Kurve, und sind P_x und P_y die Resultierenden der innerhalb von C in x- und y-Richtung wirkenden äußeren Kräfte, M deren Moment bezogen auf den Koordinatennullpunkt, dann ist mit $P = P_x + i\,P_y$ unter Verwendung von (6)

$$P = i\,|\varphi(z) + z\,\bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})|_C, \tag{25a}$$

$$M = \Re\mathrm{e}\,|\bar{z}\,z\,\bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\,\bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\psi}_2(\bar{z})|_C \tag{25b}$$

für einmaliges Umlaufen von C im positiven Sinne.

Eine entsprechende Formel für die hyperkomplexe Funktion

$$|F(s)|_C = P_y + j\ldots + j^2\ldots + j^3\,P_x$$

kann aus (24) mit Hilfe von (19) und (25) oder auf direktem Wege erhalten werden.

In mehrfach zusammenhängenden Bereichen sind neben den beiden Gleichgewichtsbedingungen (25) drei Eindeutigkeitsrelationen [1] zu beachten. Die Forderung nach Eindeutigkeit der Verschiebungen führt mit (13) zu

$$|\varkappa\,\varphi(z) - z\,\bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})|_C = 0. \tag{26}$$

Für die hyperkomplexe Funktion ergeben sich aus (24) in der Form von (19) und durch Vergleich mit (13) die Gleichungen

$$\left[-1 + \frac{1+\varkappa}{4}(1+j^2)\right] F(s) = \Re\mathrm{e}\,[\varkappa\,\varphi(z) - z\,\bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})] + \cdots = 2\,G\,u + \cdots,$$

$$\left[1 - \frac{3-\varkappa}{4}(1+j^2)\right] F(s) = \cdots + j\,\Im\mathrm{m}\,[\varkappa\,\varphi(z) - z\,\bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})] + \cdots = \cdots + j\,2\,G\,v + \cdots,$$

deren erstes bzw. zweites Element die Verschiebung u bzw. v bis auf eine Integrationskonstante angibt. Die Verschiebungen sind eindeutig, wenn bei einmaligem Durchlaufen der Kurve C das erste bzw. zweite Element der obigen Gleichungen zu seinem Ausgangswert zurückkehrt.

Gleichung (11) in Verbindung mit (12) zeigt, daß die Verdrehung eines Scheibenelementes $\tilde{\omega}$ bis auf einen konstanten Faktor durch den Imaginärteil der Funktion $\Phi(z)$ bestimmt ist. Daher ist $\tilde{\omega}$ eindeutig, wenn $\Phi(z)$ eindeutig ist.

c) Verhalten gegenüber einer Parallelverschiebung des Koordinatensystemes. Es sei ein Koordinatensystem (x_1, y_1) gegenüber dem (x, y)-System um x_0 bzw. y_0 in x- und y-Richtung verschoben. Die Spannungen seien im (x, y)-System gegeben durch $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ und $f(s)$ und im (x_1, y_1)-System durch ${}_0\Phi(z_1)$, ${}_0\Psi(z_1)$ und ${}_0f(s_1)$, wobei

$$z_1 = z - z_0, \quad z_0 = x_0 + i\,y_0; \qquad s_1 = s - s_0, \quad s_0 = x_0 + j\,y_0.$$

---

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. I, S. 110, 2. Aufl. Berlin 1953.

Auf die Spannungskombinationen (7) kann die Verschiebung des Koordinatensystemes keinen Einfluß haben, es muß also gelten

$$\Phi(z) = {}_0\Phi(z_1), \tag{27a}$$
$$\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z) = \bar{z}_1\,{}_0\Phi'(z_1) + {}_0\Psi(z_1).$$

Hieraus folgt mit der Ableitung von (27a)

$$\Psi(z) = {}_0\Psi(z_1) - \bar{z}_0\,{}_0\Phi'(z_1). \tag{27b}$$

Für die hyperkomplexe Funktion gilt die einfache Beziehung

$$f(s) = {}_0f(s_1). \tag{28}$$

Wird die Transformationsgleichung (23b) auf das verschobene Koordinatensystem bezogen, so ergibt sich mit (28)

$$f(s) = 4\,{}_0\Phi(s_1) + (1 + j^2)\,[{}_0\Psi(s_1) - 2\,{}_0\Phi(s_1) + s_1\,{}_0\Phi'(s_1)], \tag{29}$$

eine Formel, die dann von Nutzen ist, wenn die gegebene Funktion in der Form einer Reihenentwicklung an der Stelle $z = z_0$ bzw. $s = s_0$ vorliegt.

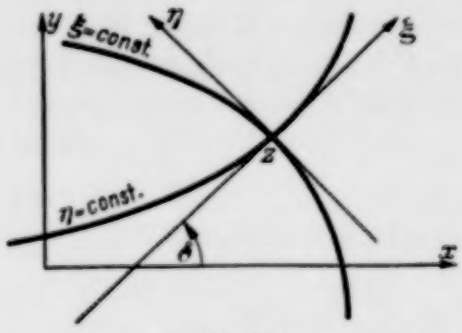

Abb. 2.
Krummlinig orthogonale Koordinaten.

d) Die Spannungen in krummlinig orthogonalen Koordinaten. In der (x, y)-Ebene sei ein System von krummlinig orthogonalen Koordinaten durch die Gleichung

$$z = \omega(\zeta) \quad \text{mit} \quad \zeta = \xi + i\,\eta$$

definiert. Die Linien $\xi = \text{konst.}$ und $\eta = \text{konst.}$ bilden dabei das neue Koordinatennetz. In einem Punkte z seien σ_x, σ_y und τ_{xy} die Spannungskomponenten im (x, y)-System. In diesem Punkte sei das (ξ, η)-System, gebildet aus den Tangenten an die Koordinatenkurven, um den Winkel δ gegenüber dem (x, y)-System gedreht (Abb. 2). Dann gilt bekanntlich, wenn σ_ξ, σ_η und $\tau_{\xi\eta}$ die Spannungskomponenten im (ξ, η)-System bezeichnen,

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\cos 2\,\delta + \tau_{xy}\sin 2\,\delta,$$
$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\cos 2\,\delta - \tau_{xy}\sin 2\,\delta,$$
$$\tau_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\,\delta + \tau_{xy}\cos 2\,\delta,$$

oder in anderer Form

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y,$$
$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2\,i\,\tau_{\xi\eta} = e^{2\,i\,\delta}(\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy}).$$

Aus der Definition der neuen Koordinaten folgt

$$e^{2\,i\,\delta} = \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}, \tag{30}$$

und mit (7) sind daher die Spannungskomponenten durch

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi}(\bar{z})], \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2\,i\,\tau_{\xi\eta} &= \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}\,2\,[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

mit $z = \omega(\zeta)$ in den allgemeinen Koordinaten ξ und η ausgedrückt.

Die hyperkomplexe Funktion, deren Elemente die Spannungskomponenten im (ξ, η)-System angeben, hat mit den Bezeichnungen von (18) die Gestalt

$$\sigma_\eta + j\cdots - j^2\,\sigma_\xi + j^3\,\tau_{\xi\eta} = \alpha + (1 + j^2)\left(\frac{\alpha + 2\,\beta}{2}\,\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})} - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{32}$$

wie sich durch (20) und (31) nachweisen läßt. Aus Gleichuug (23a) geht hervor, daß in einer

hyperkomplexen Funktion von s in der Form von *T. Levi-Civita* der komplexe Faktor von $1 + j^2$) als Summe einer Funktion von z und einer mit $\bar{z}$ multiplizierten Funktion von z geschrieben werden kann. Der Faktor von $(1 + j^2)$ in (32) wird sich jedoch wegen $\overline{\omega}'(\bar{\zeta})$ im allgemeinen nicht als Summe einer Funktion von ζ und einer mit $\bar{\zeta}$ multiplizierten Funktion von ζ schreiben lassen. Daher dürfte (32) nur in speziellen Fällen als Funktion der Variablen $\xi + j\eta$ darzustellen sein.

4. Ein mathematischer Hilfssatz. Das Verfahren von *N. Muschelišvili* in seiner neuesten Form [1] stützt sich auf einige weniger bekannte Sätze aus der Funktionentheorie, von denen hier nur das für die vorliegende Arbeit notwendige angeführt werden soll.

Es sei L eine einfache geschlossene, glatte Kontur, versehen mit einem Umlaufsinn, die die komplexe Ebene in zwei Gebiete, S^+ und S^-, teilt. Mit S^+ sei dabei das links von L liegende Gebiet bezeichnet. Auf L sei eine Funktion $\Phi(t)$ gegeben (t bezeichnet die Punkte z auf L), die der *Hölder*-Bedingung

$$|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^\mu \quad \text{mit} \quad A > 0 \text{ und } \mu > 0$$

für zwei Punkte t_1 und t_2 auf L genügt. Dann ist nach einem Satz von *J. Plemelj* [2] durch

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(t)\,dt}{t - z}$$

eine Funktion $\Phi(z)$ bestimmt, die sowohl in S^+ als auch in S^- analytisch ist und im Unendlichen verschwindet. Außerdem strebt $\Phi(z)$ bei einer Annäherung von z an L von links bzw. von rechts bestimmten Grenzwerten zu, die mit $\Phi^+(t)$ bzw. $\Phi^-(t)$ bezeichnet seien und für die gilt

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \Phi(t). \tag{33}$$

Eine Funktion von diesem Verhalten werde abschnittsweise analytisch genannt. Ist die Aufgabe gestellt, die abschnittsweise analytische Funktion $\Phi(z)$ zu bestimmen, deren Randwerte auf L die Bedingung (33) erfüllen und die für große $|z|$ von der Form

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n + 0\left(\frac{1}{z}\right)$$

ist [3], so gibt in diesem Fall

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(t)\,dt}{t - z} + \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \tag{34}$$

die eindeutige Lösung dieser Aufgabe, denn die Differenz zweier Lösungen würde auf der Kontur L keinen Sprung aufweisen, also in der ganzen Ebene analytisch sein und im Unendlichen verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn diese Differenz überall identisch verschwindet.

5. Anwendungen. Bei den folgenden Anwendungen werden wir im allgemeinen von den komplexen Spannungsfunktionen ausgehen und die hyperkomplexe Funktion durch eine Transformation nach (23b) erhalten. Die Ergebnisse in der komplexen Schreibweise sind zum Teil bereits von *A. E. Green* und *W. Zerna* [4] gegeben worden.

a) Allgemeine Spannungsfunktion für die unendliche Ebene. In der unendlich ausgedehnten Ebene greife im Koordinatenursprung die Kraft $P = P_x + i P_y$ mit den Komponenten P_x und P_y und das positiv drehende Moment M an (Abb. 3). Die Summe aus Gleichung (25a) und der mit i multiplizierten Gleichung (26) ergibt

$$|\varphi(z)|_C = -i\frac{P}{\varkappa + 1}.$$

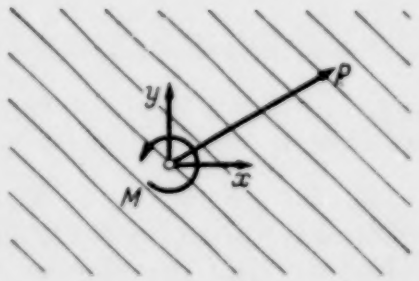

Abb. 3. Kraft und Moment in unendlicher Ebene.

[1] *N. I. Muschelišvili*, Singuläre Integralgleichungen. 2. Aufl. Moskau 1949. Übersetzt von *I. R. M. Radok* u. *W. G. Woolnough*, Melbourne 1949.
[2] *J. Plemelj*, Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), S. 205.
[3] $0(1/z)$ = Ordnungsfunktion von $1/z$ bezeichnet Glieder von der Größenordnung $1/z$.
[4] *A. E. Green* u. *W. Zerna*, Theoretical Elasticity (noch nicht veröffentlicht).

Damit ist aus (25b) und der mit $\bar{z}$ multiplizierten Gleichung (26)

$$[\psi_2(z)]_C = i\frac{\varkappa \bar{P}}{\varkappa+1} z - M$$

für eine den Nullpunkt in positivem Sinne umschließende Kurve C abzuleiten. Diese Bedingungen werden durch die Funktionen

$$\varphi(z) = -\frac{P}{2\pi(\varkappa+1)} \ln z, \qquad \psi_2(z) = \frac{\varkappa \bar{P}}{2\pi(\varkappa+1)} z \ln z + \frac{i M}{2\pi} \ln z$$

erfüllt. Durch Differentiation werden hieraus die Spannungsfunktionen

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{z}, \qquad \Psi(z) = \frac{\varkappa \bar{P}}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{z} - \frac{i M}{2\pi} \frac{1}{z^2} \tag{35}$$

gewonnen, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Punktes $z = 0$ analytisch sind und im Unendlichen verschwinden und daher die Lösung der Aufgabe darstellen.

Greifen die Kräfte $P_r (r = 1, 2, \ldots n)$ und Momente M_r an den Stellen (x_{0r}, y_{0r}) der (x, y)-Ebene an und herrscht außerdem im Unendlichen ein vorgeschriebener Spannungszustand, dann folgen mit (27) und mit den Bezeichnungen $z_r = z - z_{0r}$, $z_{0r} = x_{0r} + i\, y_{0r}$ die Spannungsfunktionen $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ für diesen allgemeinen Fall zu

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \sum_{r=1}^{n} \frac{-P_r}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{z_r} + \Gamma, \\ \Psi_0(z) &= \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\varkappa \bar{P}_r}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{z_r} - \frac{i M}{2\pi} \frac{1}{z_r^2} - \frac{\bar{z}_{0r} P_r}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{z_r^2} \right\} + \Gamma'. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Die Konstanten Γ und Γ' sind durch den Spannungszustand im Unendlichen bestimmt, denn wie (30) und (31) zeigen, ist

$$\Re\mathrm{e}\,[\Gamma] = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \qquad \Gamma' = \frac{1}{2}(N_2 - N_1)\, e^{-2i\delta},$$

wenn N_1 und N_2 die Hauptspannungen und δ den Winkel bezeichnen, den N_1 mit der positiven x-Achse einschließt. Ein imaginärer Anteil von Γ würde lediglich eine starre Verdrehung des gesamten Systems bedeuten, die keinen Einfluß auf die Spannungen hat. Zum Vergleich sei hier die entsprechende hyperkomplexe Funktion angeführt, die mit (29) und den Bezeichnungen $s_r = s - s_{0r}$, $s_{0r} = x_{0r} + j\, y_{0r}$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} f_0(s) &= 4\sum_{r=1}^{n} \frac{-P_r}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{s_r} + 4\Gamma \\ &\quad + (1+j^2)\left\{ \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\varkappa \bar{P}_r}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{s_r} - \frac{i M}{2\pi} \frac{1}{s_r^2} + \frac{3 P_r}{2\pi(\varkappa+1)} \frac{1}{s_r} \right] + \Gamma' - 2\Gamma \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

In dem Sonderfall einer einzigen Kraft im Koordinatenursprung wird diese Funktion zu

$$f(s) = \frac{1}{2\pi(\varkappa+1)\, s} \left\{ [-(1-\varkappa) + j^2(3+\varkappa)]\, P_x + [-j(3+\varkappa) + j^3(1-\varkappa)]\, P_y \right\},$$

wenn die Kraft in ihren Komponenten dargestellt ist. Dieses Ergebnis stimmt für den Fall des ebenen Spannungszustandes mit dem von *K. Schmidt* [1] angegebenen überein.

b) Lösung der Randwertaufgaben für den Kreisbereich. Der elastische Körper, eine unendliche Scheibe mit Kreisloch oder eine Kreisscheibe, nehme das Gebiet S^+ ein. Die Kontur L habe den Radius 1; der Umlaufsinn sei so festgelegt, daß S^+ links von L zu liegen kommt. Durch

$$z = e^{\zeta} = r\, e^{i\vartheta}, \quad \zeta = \ln r + i\,\vartheta$$

werden diesem Bereiche angepaßte Koordinaten eingeführt und damit nach (30) die Spannungskomponenten in bezug auf diese Koordinaten zu

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = 2\,[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})],$$

[1] *K. Schmidt*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 331.

$$\sigma_\vartheta - \sigma_r + 2\,i\,\tau_{r\vartheta} = 2\frac{z}{\bar{z}}\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right]$$

erhalten. Hieraus folgt

$$\sigma_r + i\,\tau_{r\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{z}\,\overline{\Psi}(\bar{z})'. \tag{38}$$

Die Ableitung der Verschiebungskomponenten (13) nach dem Winkel ϑ ergibt

$$2\,G\frac{\partial(u+iv)}{\partial\vartheta} = i\,z\left[\varkappa\,\Phi(z) - \overline{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) + \frac{\bar{z}}{z}\,\overline{\Psi}(\bar{z})\right]. \tag{39}$$

Die Veränderliche z auf der Kontur L sei mit t bezeichnet. Dann gilt hier, da L durch den Einheitskreis gebildet wird, $\bar{t} = 1/t$ und damit können die Spannungen und die Ableitung der Verschiebungen auf dem Rande L durch

$$\sigma_r + i\,\tau_{r\vartheta}\,|_L = \Phi(t) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\,\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2}\,\overline{\Psi}\left(\frac{1}{t}\right), \tag{40a}$$

$$2\,G\frac{\partial(u+iv)}{\partial\vartheta}\Big|_L = i\,t\left[\varkappa\,\Phi(t) - \overline{\Phi}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\,\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2}\,\overline{\Psi}\left(\frac{1}{t}\right)\right] \tag{40b}$$

ausgedrückt werden.

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß äußere Kräfte nur am Rande der Scheibe angreifen. Dann sind die Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ in S^+ analytisch. Unter $\overline{\Phi}(1/z)$, $\overline{\Phi}'(1/z)$ und $\overline{\Psi}(1/z)$ seien die Funktionen verstanden, die sich aus $\overline{\Phi}(\bar{z})$, $\overline{\Phi}'(\bar{z})$ und $\overline{\Psi}(\bar{z})$ ergeben, wenn $\bar{z}$ durch $1/z$ ersetzt wird. Die Bedeutung von $\Phi(z)$ in dem Gebiet S^- sei durch die Definition

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\,\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}\,\overline{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{für } z \text{ in } S^- \tag{41}$$

festgelegt. Dann ist $\Phi(z)$ unter den gegebenen Voraussetzungen eine abschnittsweise analytische Funktion (mit eventueller Ausnahme des Punktes $z = 0$) und der zweite Teil der Gleichungen (40a) und (40b) ist der Grenzwert von (41) für $z \to t$. Mit den Bezeichnungen von (33) ist daher

$$\sigma_r + i\,\tau_{r\vartheta}\,|_L = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \tag{42a}$$

$$2\,G\frac{\partial(u+iv)}{\partial\vartheta}\Big|_L = i\,t\,[\varkappa\,\Phi^+(t) + \Phi^-(t)], \tag{42b}$$

und es ist ersichtlich, daß $\Phi(z)$ sich durch die Teile des Randes, an denen keine äußeren Spannungen (σ_r und $\tau_{r\vartheta}$) wirken, analytisch fortsetzt.

Liegt z in S^+, so liegt $1/\bar{z}$ in S^-. Dieser Wert in (41) eingeführt ergibt

$$\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\overline{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{z}^2\,\overline{\Psi}(\bar{z}) \qquad \text{für } z \text{ in } S^+, \tag{43}$$

und der Übergang zu den konjugiert komplexen Werten liefert hieraus

$$\Psi(z) = \frac{1}{z^2}\,\Phi(z) + \frac{1}{z^2}\,\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\,\Phi'(z), \tag{44}$$

womit die Funktion $\Psi(z)$ durch $\Phi(z)$ ausgedrückt ist. Daher genügt die Kenntnis von $\Phi(z)$ in S^+ und S^- zur Bestimmung der Spannungen und Verschiebungen.

Handelt es sich um die unendliche Scheibe mit Kreisloch, so werden die Spannungsfunktionen für große $|z|$ mit (35) übereinstimmen, also von der Gestalt

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\,\pi(\varkappa+1)\,z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad \Psi(z) = \frac{\varkappa\,\bar{P}}{2\,\pi(\varkappa+1)\,z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{45}$$

sein, wenn P die Resultierende der Randbelastungen darstellt. Dann ist nach (41) für kleine $|z|$ $\Phi(z)$ von der Form

$$\Phi(z) = \frac{\varkappa\,P}{2\,\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{z} + 0(1). \tag{46}$$

Im Falle der Kreisscheibe sind die Spannungsfunktionen für $|z| < 1$ analytisch, haben also die Gestalt

$$\Phi(z) = A_0 + A_1\,z + A_2\,z^2 \ldots, \quad \Psi(z) = B_0 + B_1\,z + B_2\,z^2 \ldots, \tag{47}$$

woraus sich ergibt, daß für große $|z|$ die Funktion $\Phi(z)$ von der Form

$$\Phi(z) = -\bar{A}_0 + 0\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{48}$$

sein muß.

Liegt die erste Randwertaufgabe vor, so ist auf dem Rande L

$$\sigma_r + i\,\tau_{r\vartheta}|_L = N(t) + i\,T(t)$$

vorgegeben. Dabei ist $N(t)$ die nach außen gerichtete Normal- und $T(t)$ die Tangentialbelastung in Richtung des Umlaufsinnes von L, bezogen auf die Längeneinheit. Es sei vorausgesetzt, daß $N(t)$ und $T(t)$ der *Hölder*-Bedingung genügen. Dann ist nach (34) unter Berücksichtigung von (46)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{N(t) + i\,T(t)}{t - z}\,dt + \frac{\varkappa P}{2\pi(\varkappa + 1)}\,\frac{1}{z} \tag{49}$$

die eindeutige Lösung im Falle der unendlichen Scheibe mit Kreisloch und unter Berücksichtigung von (48)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{N(t) + i\,T(t)}{t - z}\,dt - \bar{A}_0 \tag{50}$$

die eindeutige Lösung für die Kreisscheibe. Ein Vergleich von (48) mit (47) liefert zusätzlich die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} A_0 = \Phi(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{N(t) + i\,T(t)}{t}\,dt - \bar{A}_0\,, \\ 0 &= \lim_{z\to\infty}\left[z\left\{\Phi(z) + \bar{A}_0\right\}\right] = \frac{-1}{2\pi i}\int_L [N(t) + i\,T(t)]\,dt \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} N(t)\,d\vartheta = \Re\mathrm{e}\,[A_0]\,, \qquad \int_0^{2\pi} T(t)\,d\vartheta = 0\,, \\ \int_0^{2\pi} [N(t) + i\,T(t)]\,e^{i\vartheta}\,d\vartheta = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

die den Realteil der Konstante A_0 bestimmen und besagen, daß die resultierende Kraft und das resultierende Moment der Randbelastung verschwinden müssen. Der Imaginärteil von A_0 ist als starre Drehung hier bedeutungslos.

Bei der zweiten Randwertaufgabe sind die Verschiebungen am Rande

$$u + i\,v\,|_L = g_1(t) + i\,g_2(t)$$

vorgegeben. Ihre Ableitungen nach t seien mit g_1' und g_2' bezeichnet. Für $\Phi(z)$ besteht dann nach (42b) die Randbedingung

$$\varkappa\,\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 2\,G\,[g_1'(t) + i\,g_2'(t)]\,.$$

Wird eine Hilfsfunktion $K(z)$ durch

$$K(z) = \begin{cases} \varkappa \text{ für } z \text{ in } S^+ \\ -1 \text{ für } z \text{ in } S^- \end{cases} \tag{53}$$

definiert, so muß das Produkt $K(z)\,\Phi(z)$ die Bedingungen

$$K^+(z)\,\Phi^+(z) - K^-(z)\,\Phi^-(z) = 2\,G\,[g_1'(t) + i\,g_2'(t)]$$

erfüllen. Unter der Voraussetzung, daß $g_1'(t)$ und $g_2'(t)$ die *Hölder*-Bedingung erfüllen, ist

$$K(z)\,\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\,G\,[g_1'(t) + i g_2'(t)]}{t - z}\,dt - \frac{\varkappa P}{2\pi(\varkappa + 1)}\,\frac{1}{z} \tag{54}$$

für die unendliche Scheibe mit Kreisloch und

$$K(z)\,\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\,G\,[g_1'(t) + i\,g_2'(t)]}{t - z}\,dt + \bar{A}_0 \tag{55}$$

für die Kreisscheibe die eindeutige Lösung. Die zu (51) analogen Integralbedingungen besagen hier, daß die auf dem Rande vorgegebenen Verschiebungen keinen Sprung aufweisen dürfen und geben mit $g_r + i\,g_\vartheta = (g_1 + i\,g_2)\,e^{-i\vartheta}$ die Bedingung

$$\varkappa A_0 - \bar{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,G\,(g_r + i\,g_\vartheta)\,d\vartheta$$

zur Bestimmung von A_0; dabei sind g_r und g_ϑ die Randverschiebungen in radialer und tangentialer Richtung.

Die gemischte Randwertaufgabe liegt vor, wenn auf einem Teil des Randes L' die Spannungen, auf dem übrigen Rand L'' die Verschiebungen vorgeschrieben sind. Hier sei der Kürze halber vorausgesetzt, daß L' einen Bogen zwischen den Punkten t_1 und t_2 einnimmt. Die Erweiterung auf den Fall, daß L' aus n Abschnitten besteht, ist ohne weiteres möglich [1], doch von geringerem praktischen Interesse.

Nach dem Vorausgehenden muß dann $\Phi(z)$ auf L' und L'' die Randbedingungen

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t)|_{L'} = N(t) + i\,T(t)\,,$$
$$\varkappa\,\Phi^+(t) + \Phi^-(t)|_{L''} = 2\,G\,[g_1'(t) + i\,g_2'(t)]$$

erfüllen, die kürzer geschrieben lauten

$$\Phi^+(t) - k\,\Phi^-(t) = h(t)$$

$$\text{mit } k = \begin{cases} 1 \text{ auf } L' \\ -\dfrac{1}{\varkappa} \text{ auf } L'' \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} N(t) + i\,T(t) \text{ auf } L' \\ \dfrac{2\,G}{\varkappa}\,[g_1'(t) + i\,g_2'(t)] \text{ auf } L''. \end{cases} \tag{56}$$

Wird (56) mit den Randwerten $H^+(t)$ einer Hilfsfunktion $H(z)$ multipliziert, die in S^+ und S^- analytisch ist mit der Eigenschaft, daß

$$k\,H^+(t) - H^-(t) = 0$$

ist, so wird

$$H^+(t)\,\Phi^+(t) - H^-(t)\,\Phi^-(t) = h(t)\,H^+(t)$$

die Randbedingung, die die Funktion $H(z)\,\Phi(z)$ erfüllen muß. Die geforderte Eigenschaft besitzt die Funktion

$$H(z) = (z - t_1)^{\frac{1}{2} - i\gamma}\,(z - t_2)^{\frac{1}{2} + i\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\ln \varkappa}{2\pi}\,,$$

wenn als Funktionswerte die Werte des Zweiges genommen werden, der in der längs L'' aufgeschnittenen Ebene analytisch ist mit der Eigenschaft, daß $\lim_{z\to\infty} H(z) = z$ wird. Unter der Voraussetzung, daß $H^+(t)\,h(t)$ die *Hölder*-Bedingung erfüllt, ist die Lösung durch

$$H(z)\,\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h(t)H^+(t)}{t - z}\,dt - \frac{P}{(\varkappa+1)\,2\pi} + \frac{P\cdot H(0)\cdot\varkappa}{2\pi(\varkappa+1)\,z} \tag{57}$$

für die unendliche Ebene mit Kreisloch und durch

$$H(z)\,\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h(t)\,H^+(t)}{t - z}\,dt - \bar{A}_0\,z \tag{58}$$

für die Kreisscheibe eindeutig gegeben. Die Konstante A_0 ist durch die Bedingung $\Phi(0) = A_0$ bestimmt.

Greifen Einzelkräfte und Momente im Innern der Scheibe an und sind die Randspannungen bzw. Verschiebungen gleich Null, so kann die Spannungsverteilung durch die Funktionen

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) \tag{59}$$

beschrieben werden. Dabei sind $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ die Spannungsfunktionen (36), die sich ergeben, wenn die vorgegebenen Kräfte und Momente in der unendlichen Ebene angreifen würden;

[1] *N. I. Muschelišvili*, Einige Grundaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie S. 463. 3. Aufl. Moskau 1949.

$\Phi_1(z)$ und $\Psi_1(z)$ sind in S^+ analytische Funktionen, die so zu bestimmen sind, daß ihre Randspannungen bzw. Verschiebungen entgegengesetzt gleich denjenigen von $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ werden. Es ist also für den Anteil $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ eine Aufgabe analog dem Vorhergehenden zu lösen, was mit den angegebenen Formeln in einfacher Weise möglich ist.

Ist das Verschwinden der Spannungen auf dem Rande gefordert, so muß nach (40a) und (42a) $\Phi_1(z)$, deren Bedeutung in S^- durch (41) definiert ist, die Randwerte

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = -\Phi_0(t) - \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\,\bar{\Phi}_0'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{t}\right)$$

annehmen. Es ist demnach

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-\Phi_0(t) - \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\,\bar{\Phi}_1'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{t}\right)}{t - z}\,dt \tag{60}$$

die eindeutige Lösung für die unendliche Scheibe mit Kreisloch, da die Resultierende der Randspannungen verschwindet. Die Lösung erfolgt nach dem Residuensatz und liefert

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z) &= -\bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\,\bar{\Phi}_0'\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{\Phi}_0(0) \quad \text{für } z \text{ in } S^+,\\ \Phi_1(z) &= \Phi_0(z) + \bar{\Phi}_0(0) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{für } z \text{ in } S^-. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Die Funktion $\Psi_1(z)$ bestimmt sich dann nach (44) zu

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{z^3}\,\bar{\Phi}_0'\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^4}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\,\Phi_1'(z) + \frac{1}{z^2}\,[\Phi_0(0) + \bar{\Phi}_0(0)]. \tag{62}$$

Die Lösung für die Kreisscheibe unterscheidet sich hiervon nur in der additiven Konstante und zwar ist $\bar{\Phi}_0(0)$ durch $-\bar{A}_0$ zu ersetzen, wobei der Realteil von A_0 aus

$$A_0 = \lim_{z\to 0}\Phi_1(z) = \lim_{z\to\infty} z^2\,\bar{\Psi}_0(z) - \bar{A}_0$$

erhalten wird.

Ist das Verschwinden der Verschiebung auf dem Rande gefordert, so muß die Funktion $\Phi_1(z)$ nach (40b) und (42b) die Randwerte

$$\varkappa\,\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) = -\varkappa\,\Phi_0(t) + \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\,\bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{t}\right)$$

annehmen. Die Lösung erfolgt analog dem Vorhergehenden und ergibt

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{1}{\varkappa}\left[\bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\,\bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z^2}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{\Phi}_0(0)\right],\\ \Psi_1(z) &= -\frac{\varkappa}{z^2}\,\bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}\,\Phi_0(0) + \frac{1}{z^2}\,\Phi_1(z) - \frac{1}{z}\,\Phi_1'(z) \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

für die unendliche Scheibe mit Kreisloch, wenn die resultierende Kraft, die auf dem Rande L übertragen wird, verschwindet. Die Lösung für die Kreisscheibe unterscheidet sich hiervon nur darin, daß $-\bar{A}_0$ an die Stelle von $\bar{\Phi}_0(0)$ tritt, wobei A_0 aus

$$A_0 = \Phi_1(0) = \lim_{z\to\infty}\left\{\frac{1}{\varkappa}\,z^2\,\bar{\Psi}_0(z)\right\} + \frac{\bar{A}_0}{\varkappa}$$

erhalten wird.

Ist auf einem Teil des Randes L' das Verschwinden der Spannungen und auf dem übrigen Rand L'' das Verschwinden der Verschiebungen gefordert, so kann die Lösung in der Form

$$\left.\begin{aligned} H(z)\,\Phi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h(t)\,H^+(t)}{t - z}\,dt\\ \text{mit } h(t) &= \begin{cases} -\Phi_0(t) - \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\,\bar{\Phi}_0'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{t}\right) & \text{auf } L'\\ -\Phi_0(t) + \frac{1}{\varkappa}\left[\bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\,\bar{\Phi}_0'\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2}\,\bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{t}\right)\right] & \text{auf } L'' \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

für die unendliche Scheibe mit Kreisloch angegeben werden, wenn die Resultierende der auf L'' übertragenen Kräfte verschwindet. Die Lösung für die Kreisscheibe ergibt sich hieraus durch Addition von $-\bar{A}_0 z$. Die Konstante A_0 ist durch $\Phi_1(0) = A_0$ bestimmt.

Durch eine Kombination der hier gegebenen Lösungen ist es immer möglich, eine Aufgabe für den Kreisbereich, bei der auf dem Rande Spannungen oder Verschiebungen und außerdem im Innern angreifende Kräfte und Momente vorgegeben sind, zu behandeln.

Als Beispiel seien die Spannungsfunktionen für eine Kreisscheibe mit freien Rändern angegeben, in der an den Stellen (x_{0r}, y_{0r}) $(r = 1, 2, \ldots n)$ die Kräfte P_r und Momente M_r angreifen:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \Big\{ \frac{-P_r}{z_r} - \frac{\varkappa P_r}{z'_r} + \frac{\bar{P}_r}{\bar{z}_{0r}^2 z_r'^2}(z'_{0r} - z_{0r}) - \bar{P}_r(z'_{0r} - z_{0r}) - \frac{1}{2}(\varkappa+1) P_r \bar{z}_{0r} + \frac{i M_r(\varkappa+1)}{\bar{z}_{0r}^2 z_r'^2} \Big\},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \Big\{ \frac{\varkappa \bar{P}_r}{z_r} - \frac{\bar{z}_{0r} P_r}{z_r^2} - \frac{i M_r(\varkappa+1)}{z_r^2} + \frac{\bar{P}_r}{z'_r} - \frac{\bar{P}_r}{z_r'^2}(z'_{0r} - z_{0r}) + \frac{2\bar{P}_r}{\bar{z}_{0r} z_r'^3}(z'_{0r} - z_{0r}) - \frac{\varkappa P_r \bar{z}_{0r}}{z_r'^2} - \frac{i M_r(\varkappa+1)}{z_r'^2} + \frac{2 i M_r(\varkappa+1)}{\bar{z}_{0r} z_r'^3} \Big\}.$$

Darin ist zur Abkürzung $z'_r = z - z'_{0r}$, $z'_{0r} = 1/z_{0r} = x'_{0r} + i y'_{0r}$ gesetzt. Es zeigt sich, daß die Randbedingungen dadurch erfüllt werden, daß zu jeder Singularität an einer Stelle (x_{0r}, y_{0r}) eine zweite an der Stelle (x'_{0r}, y'_{0r}) hinzutritt. Dabei ergibt sich die Lage der zweiten Stelle durch „Spiegelung" der ersten am unbelasteten Kreisrand. Hierin kann eine Analogie zum *Schwarz*schen Spiegelungsprinzip gesehen werden.

Ein Ergebnis wie das obige kann nun leicht mit Hilfe von (29) in die hyperkomplexe Schreibweise transformiert werden. In diesem Falle wird mit den Bezeichnungen $s'_r = s - s'_{0r}$, $s'_{0r} = x'_{0r} + j y'_{0r}$

$$f(s) = \frac{4}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \Big\{ \frac{-P_r}{s_r} - \frac{\varkappa P_r}{s'_r} + \frac{\bar{P}_r}{\bar{z}_{0r}^2 s_r'^2}(z'_{0r} - z_{0r}) - \bar{P}_r(z'_{0r} - z_{0r}) - \frac{1}{2}(\varkappa+1) P_r \bar{z}_{0r} + \frac{i M_r(\varkappa+1)}{\bar{z}_{0r}^2 s_r'^2} \Big\} + \frac{(1+j^2)}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \Big\{ \frac{3 P_r}{s_r} + \frac{\varkappa \bar{P}_r}{s_r} - \frac{i M_r(\varkappa+1)}{s_r^2} + \frac{3\varkappa P_r}{s'_r} + \frac{\bar{P}_r}{s'_r} - \frac{4\bar{P}_r}{\bar{z}_{0r}^2 s_r'^2}(z'_{0r} - z_{0r}) - \frac{\bar{P}_r}{s_r'^2}(z'_{0r} - z_{0r}) + \frac{\varkappa P_r}{s_r'^2}(\bar{z}'_{0r} - \bar{z}_{0r}) - \frac{2\bar{P}}{\bar{z}_{0r} z_{0r} s_r'^3}(z'_{0r} - z_{0r})^2 + 2\bar{P}_r r(z'_{0r} - z_{0r}) + (\varkappa+1) P_r \bar{z}_{0r} - \frac{4 i M_r(\varkappa+1)}{\bar{z}_{0r}^2 s_r'^2} - \frac{i M_r(\varkappa+1)}{s_r'^2} + \frac{2 i M_r(\varkappa+1)}{\bar{z}_{0r} s_r'^3} \Big\}.$$

In dem Sonderfall, daß zwei diametral gerichtete Kräfte auf einem Durchmesser der Scheibe angreifen, stimmt diese Formel mit dem von *K. Schmidt* [1] erhaltenen Ergebnis überein.

c) Lösungen für die Halbebene. Die gerade Linie, die die Begrenzung der Halbebene bildet, kann als ein Kreis mit dem Radius Unendlich aufgefaßt werden. In den oben angegebenen Lösungen für den Kreisbereich ist daher jeweils die entsprechende Lösung für die Halbebene enthalten. Insbesondere werden die Gleichungen für den Fall, daß der elastische Körper die obere Halbebene einnimmt, aus den entsprechenden Gleichungen für die unendliche Ebene mit Kreisloch dadurch gewonnen, daß das Koordinatensystem in den oberen Randpunkt des Kreises verschoben und die Längeneinheit so gewählt wird, daß der Radius des Kreises gegen Unendlich strebt. Es werde dabei vorausgesetzt, daß alle äußeren Kräfte in der Halbebene in einer endlichen Umgebung des Koordinatenursprunges angreifen. Dann wird durch diesen Grenzübergang aus (41) die Definition

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}(z) - z\bar{\Phi}'(z) - \bar{\Psi}(z) \quad \text{für } z \text{ in } S^- \tag{65}$$

[1] *K. Schmidt*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 336.

für die Funktion $\Phi(z)$ in der unteren Halbebene S^- gewonnen. Hier sind unter $\overline{\Phi}(z)$, $\overline{\Phi}'(z)$ und $\overline{\Psi}(z)$ die Funktionen zu verstehen, die sich aus $\overline{\Phi}(\bar{z})$, $\overline{\Phi}'(\bar{z})$ und $\overline{\Psi}(\bar{z})$ ergeben, wenn $\bar{z}$ durch z ersetzt wird. Liegt z in der oberen Halbebene S^+, so liegt $\bar{z}$ in S^-, daher gilt ebenfalls

$$\Phi(\bar{z}) = -\overline{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) - \overline{\Psi}(\bar{z}) \qquad \text{für } z \text{ in } S^+,$$

woraus durch Übergang zu den konjugiert komplexen Werten folgt

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - z\,\Phi'(z) - \overline{\Phi}(z) \qquad \text{für } z \text{ in } S^+. \tag{66}$$

Diese Gleichung erlaubt, die Funktion $\Psi(z)$ durch $\Phi(z)$ auszudrücken. Es genügt also auch hier die Kenntnis von $\Phi(z)$ in S^+ und S^- zur Bestimmung der Spannungen und Verschiebungen. Aus den Gleichungen (49), (54) und (57) werden mit $h(t)$ nach (56) die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{N(t) + i\,T(t)}{t - z}\,dt \\ K(z)\,\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\,G\,[g_1'(t) + i\,g_2'(t)]}{t - z}\,dt \\ H(z)\,\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h(t)\,H^+(t)}{t - z}\,dt - \frac{P}{2\pi} \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

der ersten, zweiten und der gemischten Randwertaufgabe für die Halbebene erhalten. Dabei ist L die von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufende reelle Achse während die übrigen Bezeichnungen beibehalten sind.

Greifen Einzelkräfte und Momente im Innern der Halbebene an und ist auf dem Rande L das Verschwinden der Spannungen bzw. der Verschiebungen vorgeschrieben, so werden aus (61), (62) und (63) die Lösungen

$$\Phi_1(z) = -\Phi_0(z) - z\,\overline{\Phi}_0'(z) - \overline{\Psi}_0(z), \quad \Psi_1(z) = \overline{\Psi}_0(z) - z\,\Phi_1'(z) + z\,\overline{\Phi}_0'(z)$$

für die erste Randwertaufgabe, beziehungsweise

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\varkappa}\,[\overline{\Phi}_0(z) + z\,\overline{\Phi}_0'(z) + \overline{\Psi}_0(z)], \quad \Psi_1(z) = \varkappa\,\overline{\Phi}_0(z) - \Phi_1(z) - z\,\Phi_1'(z)$$

für die zweite Randwertaufgabe gewonnen. Ist auf einem Teil des Randes L' das Verschwinden der Spannungen und auf dem Rest des Randes L'' das Verschwinden der Verschiebungen gefordert, so wird die Lösung aus (64) zu

$$H(z)\,\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h(t)\,H^+(t)}{t - z}\,dt$$

$$\text{mit } h(t) = \begin{cases} -\Phi_0(t) - \overline{\Phi}_0(t) - t\,\overline{\Phi}_0'(t) - \overline{\Psi}_0(t) & \text{auf } L' \\ -\Phi_0(t) + \dfrac{1}{\varkappa}\,[\overline{\Phi}_0(t) + t\,\overline{\Phi}_0'(t) + \overline{\Psi}_0(t)] & \text{auf } L'' \end{cases}$$

erhalten, wenn die resultierende Kraft, die auf L'' übertragen wird, verschwindet.

Als Beispiel seien die Spannungsfunktionen angegeben, die sich für eine in der oberen Halbebene erstreckende Scheibe ergeben, deren Rand unverschieblich festgehalten wird und in der an den Stellen (x_{0r}, y_{0r}) $(r = 1, 2, \ldots n)$ die Kräfte P_r und Momente M_r angreifen:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi(\varkappa+1)}\sum_{r=1}^{n}\left\{-\frac{P_r}{z_r} + \frac{P_r}{z_r'} + \frac{\bar{P}_r}{\varkappa\,z_r'^2}\,(z_{0r}' - z_{0r}) + \frac{i\,M_r(\varkappa+1)}{\varkappa\,z_r'^2}\right\},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi(\varkappa+1)}\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{\varkappa\,\bar{P}_r}{z_r} - \frac{\bar{z}_{0r}\,P_r}{z_r^2} - \frac{i\,M_r(\varkappa+1)}{z_r^2} - \frac{\varkappa\,\bar{P}_r}{z_r'} + \frac{P_r\,\bar{z}_{0r}}{z_r'^2} + \frac{\bar{P}_r}{\varkappa\,z_r'^2}\,(z_{0r}' - z_{0r})\right.$$
$$\left. + \frac{2\,\bar{P}_r\,\bar{z}_{0r}}{\varkappa\,z_r'^3}\,(z_{0r}' - z_{0r}) + \frac{i\,M_r(\varkappa+1)}{\varkappa\,z_r'^2} + \frac{2\,i\,M_r(\varkappa+1)\,z_{0r}'}{\varkappa\,z_r'^3}\right\}.$$

Hier bedeutet $z_r' = z - z_{0r}'$ und $z_{0r}' = \bar{z}_{0r} = x_{0r}' + i\,y_{0r}'$. Durch (29) wird hieraus leicht die entsprechende hyperkomplexe Spannungsfunktion mit den Bezeichnungen $s_r' = s - s_{0r}'$, $s_{0r}' = x_{0r}' + j\,y_{0r}'$ gewonnen:

$$f(s) = \frac{4}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \left\{ -\frac{P_r}{s_r} + \frac{P_r}{s'_r} + \frac{\bar{P}_r}{\varkappa s'^2_r} (z'_{0r} - z_{0r}) + \frac{i M_r(\varkappa+1)}{\varkappa s'^2_r} \right\}$$

$$+ \frac{1+j^2}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{3P_r + \varkappa \bar{P}_r}{s_r} - \frac{i M_r(\varkappa+1)}{s_r^2} - \frac{3P_r + \varkappa \bar{P}_r}{s'_r} - \frac{3\bar{P}_r - \varkappa P_r}{\varkappa s'^2_r} (z'_{0r} - z_{0r}) \right.$$

$$\left. + \frac{2\bar{P}_r}{\varkappa s'^3_r} (z'_{0r} - z_{0r})^2 - \frac{3 i M_r(\varkappa+1)}{\varkappa s'^2_r} + \frac{2 i M_r(\varkappa+1)}{\varkappa s'^3_r} (z'_{0r} - z_{0r}) \right\}.$$

Bei gradlinigen Begrenzungen gestaltet sich die Lösung der sogenannten dritten Randwertaufgabe, bei der auf dem Rande die Tangentialspannung und die Normalverschiebung vorgeschrieben sind, besonders einfach. Aus (7) und (13) leiten sich die Gleichungen

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}),$$
$$2G\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} = \varkappa\Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z})$$

ab. Auf dem Rande L gilt hier $z = \bar{z} = t$ und daher können die Spannungen und die Ableitung der Verschiebungen auf dem Rande auch durch

$$\sigma_y - i\tau_{xy}|_L = N(t) + iT(t) = \Phi(t) + \bar{\Phi}(t) + t\bar{\Phi}'(t) + \bar{\Psi}(t),$$
$$2G\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\Big|_L = 2G[g'_1(t) + ig'_2(t)] = \varkappa\Phi(t) - \bar{\Phi}(t) - t\bar{\Phi}'(t) - \bar{\Psi}(t)$$

angegeben werden. Der Imaginärteil dieser Gleichungen liefert die Beziehungen

$$2iT(t) = t\bar{\Phi}'(t) - t\Phi'(t) + \bar{\Psi}(t) - \Psi(t),$$
$$2i[T(t) + 2Gg'_2(t)] = (\varkappa+1)[\Phi(t) - \bar{\Phi}(t)].$$

Dieses Ergebnis legt es nahe, die Fortsetzung der Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ in S^- durch

$$\Phi(z) = \bar{\Phi}(z) \quad \text{für } z \text{ in } S^-, \quad \Psi(z) = \bar{\Psi}(z) \quad \text{für } z \text{ in } S^- \tag{68}$$

zu definieren. Dann setzen sich $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ durch die Teile des Randes, auf denen Tangentialspannungen und Normalverschiebungen verschwinden, analytisch fort. Für $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ ergeben sich dann die Randwertaufgaben

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{2i}{\varkappa+1}[T(t) + 2Gg'_2(t)],$$
$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = -2iT(t) + t[\bar{\Phi}'(t) - \Phi'(t)].$$

Wird vorausgesetzt, daß $T(t)$ und $g'_2(t)$ sowie deren erste Ableitungen der *Hölder*-Bedingung genügen, so ist die Lösung durch

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2i[T(t) + 2Gg'_2(t)]}{(\varkappa+1)(t-z)}\,dt,$$
$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-2iT(t) + t[\bar{\Phi}'(t) - \Phi'(t)]}{t-z}\,dt$$

eindeutig gegeben.

Greifen Einzelkräfte und Momente im Innern der Scheibe an und ist auf dem Rande das Verschwinden der Tangentialspannung und der Normalverschiebung gefordert, so kann durch eine Rechnung analog der Vorausgegangenen die Lösung

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \bar{\Phi}_0(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \bar{\Psi}_0(z) \tag{69}$$

gefunden werden.

Soll dieses Ergebnis in hyperkomplexer Form dargestellt werden, so ist es zweckmäßig, durch $\bar{f}_0(\bar{s})$ eine Funktion zu definieren, die aus $f_0(s)$ dadurch entsteht, daß überall j durch $-j$ ersetzt wird. Wie (15) zeigt, geht dadurch gleichzeitig i in $-i$ über. Außerdem sei $\bar{f}_0(s)$ die-

jenige Funktion, die aus $\bar{f}_0(\bar{s})$ entsteht, wenn $\bar{s}$ durch s ersetzt wird. Mit dieser Bezeichnungsweise ist die Lösung der obigen Aufgabe durch

$$f(s) = f_0(s) + \bar{f}_0(s) \tag{70}$$

gegeben, wie durch (23b) nachzuprüfen ist.

d) Lösungen für Bereiche, die sich durch rationale Funktionen auf den Kreis abbilden lassen. Die elastische Scheibe sei von einer einfach geschlossenen, glatten Kontur L begrenzt. Durch die rationale Funktion

$$z = \omega(\zeta) \tag{71}$$

werde der von der Scheibe eingenommene Bereich auf das Gebiet S^+ der ζ-Ebene konform abgebildet, das von dem Einheitskreis Λ begrenzt ist. Dabei sei die Abbildung so vorgenommen, daß im Falle eines endlichen Bereiches, dieser auf das Innere, ein unendlicher Bereich auf das Äußere von Λ abgebildet wird. Der Umlaufsinn von Λ wird so festgesetzt, daß das Gebiet S^+ links von Λ zu liegen kommt. Die Funktion $\omega(\zeta)$ hat dann die Form

$$\omega(\zeta) = c\,\zeta + \omega_0(\zeta), \tag{72}$$

wobei $\omega_0(\zeta)$ eine in S^+ analytische Funktion und c eine komplexe Konstante darstellt. Unter $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$ seien diejenigen Funktionen von ζ verstanden, die sich aus $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ ergeben, wenn z durch $\omega(\zeta)$ ersetzt wird. Dann ist

$$\Phi'(\zeta) = \omega'(\zeta)\,\Phi'(z).$$

Die Funktion $\omega(\zeta)$ mit $\zeta = \varrho\,e^{i\Theta}$ definiert gleichzeitig in der z-Ebene ein krummliniges System der Koordinaten ϱ und Θ mit der Eigenschaft, daß die Kurve $\varrho = 1$ mit der Kontur L zusammenfällt. Die Spannungskomponenten in Bezug auf diese Koordinaten sind nach (31)

$$\sigma_\varrho + \sigma_\Theta = 2\,[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta})],$$

$$\sigma_\Theta - \sigma_\varrho + 2\,i\,\tau_{\varrho\Theta} = 2\,\frac{\omega'(\zeta)\,\zeta}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})\,\bar{\zeta}}\left[\bar{\omega}(\bar{\zeta})\,\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \Psi(\zeta)\right],$$

woraus

$$\sigma_\varrho + i\,\tau_{\varrho\Theta} = \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta\,\omega'(\zeta)}\,[\omega(\zeta)\,\bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) + \bar{\omega}'(\bar{\zeta})\,\bar{\Psi}(\bar{\zeta})]$$

zu erhalten ist. Die Ableitung der Verschiebungen (13) nach Θ ergibt

$$2\,G\,\frac{\partial(u+iv)}{\partial\Theta} = i\,\zeta\,\omega'(\zeta)\left\{\varkappa\,\Phi(\zeta) - \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta\,\omega'(\zeta)}\,[\omega(\zeta)\,\bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) + \bar{\omega}'(\bar{\zeta})\,\bar{\Psi}(\bar{\zeta})]\right\}.$$

Es erweist sich hier als zweckmäßig, die Funktion $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ als Einheit zu betrachten. Die Fortsetzung dieser Funktion in S^- sei durch

$$\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) = -\,\omega'(\zeta)\,\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2}\left[\omega(\zeta)\,\bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\bar{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] \quad \text{für } \zeta \text{ in } S^- \tag{73}$$

definiert. Dabei sind unter $\bar{\Phi}(1/\zeta)$, $\bar{\Phi}'(1/\zeta)$, $\bar{\Psi}(1/\zeta)$ und $\bar{\omega}(1/\zeta)$ diejenigen Funktionen zu verstehen, die sich aus $\bar{\Phi}(\bar{\zeta})$, $\bar{\Phi}'(\bar{\zeta})$, $\bar{\Psi}(\bar{\zeta})$ und $\bar{\omega}(\bar{\zeta})$ ergeben, wenn $\bar{\zeta}$ durch $1/\zeta$ ersetzt wird. Diese Definition ist so gewählt, daß sich die Funktion $\Phi(\zeta)$ durch die Teile der Kontur Λ, die Bilder der unbelasteten Stücke des Randes L sind, analytisch fortsetzt. Liegt ζ in S^+, so liegt $1/\bar{\zeta}$ in S^-. Dieser Wert als Veränderliche in (73) eingesetzt ergibt nach Übergang zu den konjugiert komplexen Werten

$$\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}\,\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] - \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta) \quad \text{für } \zeta \text{ in } S^+. \tag{74}$$

Diese Gleichung erlaubt, die Funktion $\Psi(\zeta)$ durch $\Phi(\zeta)$ auszudrücken. Es genügt daher die Kenntnis der Funktion $\Phi(\zeta)$ in S^+ und S^- zur Bestimmung der Spannungen und Verschiebungen. Die Werte von ζ auf dem Kreise Λ seien mit λ bezeichnet. Dann ist $\lambda = 1/\bar{\lambda}$ und damit können die Werte der Spannungen und Verschiebungen am Rande durch die Randwerte der Funktion $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} [\omega'(\lambda)\,\Phi(\lambda)]^+ - [\omega'(\lambda)\,\Phi(\lambda)]^- &= \omega'(\lambda)\,[N(\lambda) + i\,T(\lambda)], \\ \varkappa\,[\omega'(\lambda)\,\Phi(\lambda)]^+ + [\omega'(\lambda)\,\Phi(\lambda)]^- &= 2\,G\,[g_1'(\lambda) + i\,g_2'(\lambda)]. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Hier bedeuten g_1' und g_2' die Ableitung der Verschiebungen g_1 und g_2 nach λ.

Greifen äußere Kräfte nur am Rande des elastischen Körpers an, so sind $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$ in S^+ analytisch und daher wegen (72) auch $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ und $\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)$. Im Falle eines unendlichen Bereichs ist nach (45) für große $|\zeta|$

$$\left.\begin{aligned}\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) &= -\frac{P}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\zeta}+0\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\\ \omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta) &= \frac{\overline{P}\,\varkappa}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\zeta}+0\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

wobei P die Resultierende der auf L angreifenden äußeren Kräfte darstellt. Die rationale Funktion $\omega'(\zeta)$ habe an den n Stellen ζ_r $(r=1,2,\ldots n)$, die in S^- liegen, Pole von der maximalen Ordnung m_r. Wird $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ in das Gebiet S^- fortgesetzt, so zeigt (73), daß $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ ebenfalls Pole an den Stellen ζ_r von der maximalen Ordnung m_r aufweist. Hinzu kommt im Falle eines unendlichen Bereiches an der Stelle $\zeta=0$ derPol

$$\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)=\frac{P\,\varkappa}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\zeta}+0(1),$$

der sich durch Anwendung von (73) auf (76) ergibt. Damit ist die Lage aller Pole der Funktion $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ und deren maximale Ordnung bekannt. Eine beliebige Funktion $\Phi(\zeta)$ würde jedoch, wie aus (74) hervorgeht, bei der Funktion $\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)$ an den Stellen $\zeta_r'=1/\bar{\zeta}_r$, die in S^+ liegen, Pole von der maximalen Ordnung m_r hervorrufen, was den Voraussetzungen widerspricht. Die Bedingung, daß $\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)$ in S^+ analytisch bleibt, liefert für jede Stelle ζ_r' ein System von m_r linearen Gleichungen, die die m_r ersten Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung der Funktion $\Phi(\zeta)$ an der Stelle ζ_r' mit den Koeffizienten der Hauptteile des Poles der Funktion $\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$ an der Stelle ζ_r in Beziehung setzt. Diese n Gleichungssysteme seien kurz mit

$$D_1=0\,,\quad D_2=0\ldots D_n=0 \tag{77}$$

angedeutet. Besonders einfach werden diese Bedingungen wenn $\omega(\zeta)$ die Form einer *Laurent*schen Reihenentwicklung an der Stelle $\zeta=0$ hat, da dann Pole nur an den Stellen $\zeta=0$ und $\zeta=\infty$ auftreten.

Es sind nun nach (34) bei den üblichen Voraussetzungen über die Stetigkeit der vorgegebenen Randwerte

$$\left.\begin{aligned}\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{[N(\lambda)+i\,T(\lambda)]\,\omega'(\lambda)}{\lambda-\zeta}\,d\lambda+R(\zeta)+\frac{P\,\varkappa}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\zeta},\\ K(\zeta)\,\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{2\,G[g_1'(\lambda)+i\,g_2'(\lambda)]}{\lambda-\zeta}\,d\lambda+R(\zeta)-\frac{P\,\varkappa}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\zeta},\\ H(\zeta)\,\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{h(\lambda)\,H^+(\lambda)}{\lambda-\zeta}\,d\lambda+R(\zeta)+\frac{P\,\varkappa\,H(0)}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{1}{\zeta}-\frac{P}{2\pi(\varkappa+1)}\\ &\text{mit } h(\lambda)=\begin{cases}\omega'(\lambda)\,[N(\lambda)+i\,T(\lambda)] & \text{auf } \Lambda',\\ \dfrac{2\,G}{\varkappa}\,[g_1'(\lambda)+i\,g_2'(\lambda)] & \text{auf } \Lambda''\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

die Lösungen der ersten, zweiten und der gemischten Randwertaufgabe für einen unendlichen Bereich. Dabei sind $K(\zeta)$ und $H(\zeta)$ die zu $K(z)$ und $H(z)$ analogen Hilfsfunktionen in der ζ-Ebene, Λ' und Λ'' die Bilder von L' und L'' und $R(\zeta)$ ist eine rationale Funktion, die nur an den Stellen ζ_r Pole der maximalen Ordnung m_r besitzt und im Unendlichen verschwindet. Die Lösung (78) liefert mit (77) ein System von $\sum_{r=1}^{n} m_r$ linearen Gleichungen für die Koeffizienten der Hauptteile der Pole von $R(\zeta)$. Nach Lösung dieses Gleichungssystemes ist $R(\zeta)$ vollständig bestimmt.

Im Falle eines endlichen Bereiches ist $P=0$ zu setzen; dafür treten bestimmte additive Konstanten und bei der gemischten Randwertaufgabe ein Pol ersten Grades an der Stelle $\zeta=\infty$ hinzu. Diese sind durch (73) mit den Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\Phi(\zeta)$ an der Stelle $\zeta=0$ verknüpft und durch Untersuchung des Verhaltens der Lösung (78) im Unendlichen zu bestimmen.

Es wurde bereits gezeigt, daß sich die Aufgaben, bei denen im Innern des Körpers angreifende Kräfte vorgegeben sind, auf den hier behandelten Fall, daß Kräfte nur am Rande angreifen, zurückführen läßt. Es kann daher auf eine besondere Behandlung an dieser Stelle verzichtet werden.

e) Angenäherte Lösung für Bereiche, die von einer beliebigen einfach geschlossenen Kontur begrenzt sind. Zu jedem Bereich S, der von einer beliebigen einfach geschlossenen Kontur begrenzt ist, existiert eine Funktion

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \omega_0(\zeta),$$

die diesen Bereich auf das Äußere beziehungsweise auf das Innere des Einheitskreises konform abbildet. Die Funktion $\omega_0(\zeta)$ ist in dem Bildbereich von S analytisch und kann daher durch die Entwicklung

$$\omega_0(\zeta) = \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots$$

für einen unendlichen Bereich und durch

$$\omega_0(\zeta) = c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3 + \cdots$$

für einen endlichen Bereich dargestellt werden. Wird diese Entwicklung nach einer bestimmten Anzahl n von Gliedern abgebrochen, so wird durch die Funktionen

$$\omega_n(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c^2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n},$$

$$\omega_n(\zeta) = c\zeta + c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3 + \cdots + c_n\zeta^n$$

ein Bereich S_n auf das Äußere bzw. Innere des Einheitkreises abgebildet, der sich von S um so weniger unterscheidet, je größer n gewählt wird. Die Funktion $\omega_n(\zeta)$ ist rational, daher ist die Lösung der entsprechenden Aufgabe für den Bereich S_n mit den oben angegebenen Formeln möglich. Diese Lösung wird sich von der gesuchten um so weniger unterscheiden, je weniger sich S_n von S unterscheidet. Durch Wahl eines genügend großen n ist daher die gesuchte Lösung mit beliebiger Genauigkeit zu erreichen. Als Beispiel für ein derartiges Vorgehen sei die Arbeit von *C. A. M. Gray* [1] genannt, die eine spezielle Aufgabe für einen quadratischen Bereich löst.

f) Näherungslösungen für Bereiche, die von mehreren Konturen begrenzt sind. Ist der betrachtete Bereich von einer endlichen Anzahl n von Konturen begrenzt, wie zum Beispiel die unendliche Ebene mit n Öffnungen, so kann die Lösung durch ein alternierendes Verfahren angenähert erreicht werden. Es werden dabei zunächst diejenigen Spannungsfunktionen bestimmt, die die vorgegebenen Randbedingungen jeweils an einer Kontur befriedigen würden, wenn die übrigen nicht vorhanden wären. Die Summe dieser n Lösungen stellt die erste Näherung dar. Dabei hat jedoch jeder der n Anteile an den übrigen $n-1$ Konturen Randwerte zur Folge, die mit den Randbedingungen nicht verträglich sind. Die nächst bessere Näherung wird durch Addition derjenigen Spannungsfunktionen erhalten, die die störenden Randwerte jeweils an einer Kontur zu Null machen würden, wenn die übrigen $n-1$ Konturen nicht vorhanden wären. Auch diese Lösung weist Abweichungen der Randwerte von den Sollwerten an allen Konturen auf, die jedoch geringer sind als die bei der vorhergehenden Näherung aufgetretenen, da die Spannungen, die infolge einer Änderung an einer Kontur auftreten, mit der Entfernung abnehmen und daher auf den übrigen Konturen Abweichungen zur Folge haben, die kleiner sind als die vorgenommene Änderung. Es ist einzusehen, daß dieses Verfahren nach einer genügend großen Zahl von Schritten zu einer Lösung von gewünschter Genauigkeit führen wird. Die Konvergenz des Verfahrens ist um so besser, je größer der Abstand der einzelnen Konturen im Verhältnis zu ihrer Ausdehnung ist. Der Rechenaufwand steigt mit der Anzahl der Konturen jedoch erheblich an.

Als einfaches Beispiel sei hier ein Parallelstreifen behandelt, der von den Geraden $y = 0$ und $y = a$ begrenzt wird. Auf diesen Rändern sei das Verschwinden der Tangentialspannung und der Normalverschiebung gefordert (dritte Randwertaufgabe). Im Innern des Streifens greifen an den Stellen (x_{0r}, y_{0r}) $(r = 1, 2, \ldots n)$ die Kräfte P_r und Momente M_r an. Da zur Aufstellung der Lösung ein häufiges Verschieben des Koordinatensystems erforderlich ist, er-

[1] *C. A. M. Gray*, Quart. Journ. Mech. appl. Math. 4 (1951), S. 444.

weist sich hier die hyperkomplexe Spannungsfunktion als vorteilhafter für die Aufstellung der Lösung. Die durch die vorgegebene Belastung im Streifen hervorgerufenen Singularitäten werden durch die Funktion $f_0(s)$ beschrieben. Die erste Näherung ist nach (70) durch Spiegelung an beiden Rändern als

$$f(s) = f_0(s) + \bar{f}_0(s) + \bar{f}_0(s - 2\,j\,a)$$

zu erhalten. Eine Fortsetzung dieses Verfahrens bis ins Unendliche liefert dann die Lösung der gestellten Aufgabe:

$$f(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{f_0(s + 2\,m\,j\,a) + \bar{f}_0(s + 2\,m\,j\,a)\}$$

oder mit (37) vollständig ausgeschrieben:

$$f(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{-4P_r + (1+j^2)(\varkappa \bar{P}_r + 3P_r)}{s_r + 2\,m\,j\,a} + \frac{-4\bar{P}_r + (1+j^2)(\varkappa P_r + 3\bar{P}_r)}{s'_r + 2\,m\,j\,a} \right] \\ &- \frac{i\,M}{2\pi} \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{1}{(s_r + 2\,m\,j\,a)^2} - \frac{1}{(s'_r + 2\,m\,j\,a)^2} \right] \end{aligned} \right\} \tag{79}$$

unter Verwendung der Bezeichnungen $s_r = s - s_{0r}$, $s_{0r} = x_{0r} + j\,y_{0r}$ und $s'_r = s - s'_{0r}$, $s'_{0r} = x_{0r} - j\,y_{0r}$.

Das Ergebnis stellt eine einfach periodische Funktion dar, die sich auch wie folgt zusammenfassen läßt:

$$\left. \begin{aligned} f(s) = \frac{1}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} &\left\{ [-4P_r + (1+j^2)(\varkappa \bar{P}_r + 3P_r)] \frac{\pi}{2\,a\,j} \operatorname{ctg} \frac{\pi \cdot s_r}{2\,a\,j} \right. \\ &\left. + [-4\bar{P}_r + (1+j^2)(\varkappa P_r + 3\bar{P}_r)] \frac{\pi}{2\,a\,j} \operatorname{ctg} \frac{\pi\, s'_r}{2\,a\,j} \right\} \\ - \frac{i\,M}{2\pi} \sum_{r=1}^{n} &\left[\frac{4\,a^2 j^2}{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi\, s_r}{2\,a\,j}\right)} - \frac{4\,a^2 j^2}{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi\, s'_r}{2\,a\,j}\right)} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{80}$$

Die (79) entsprechenden komplexen Spannungsfunktionen sind

$$\Phi(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{-P_r}{z_r + 2\,i\,m\,a} - \frac{\bar{P}_r}{z'_r + 2\,i\,m\,a} \right] \right\}$$

$$\Psi(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi(\varkappa+1)} \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\varkappa \bar{P}_r}{z_r + 2\,i\,m\,a} + \frac{\varkappa P_r}{z'_r + 2\,i\,m\,a} \right. \\ &\left. - \frac{(\bar{z}_{0r} + 2\,i\,m\,a)\,P_r}{(z_r + 2\,i\,m\,a)^2} - \frac{(\bar{z}'_{0r} + 2\,i\,m\,a)\,\bar{P}_r}{(z'_r + 2\,i\,m\,a)^2} - \frac{i\,M(\varkappa+1)}{(z_r + 2\,i\,m\,a)^2} + \frac{i\,M(\varkappa+1)}{(z'_r + 2\,i\,m\,a)^2} \right] \end{aligned} \right\}$$

unter Verwendung der Bezeichnungen $z_r = z - z_{0r}$, $z_{0r} = x_{0r} + i\,y_{0r}$ und $z'_r = z - z'_{0r}$, $z'_{0r} = x_{0r} - i\,y_{0r}$. Hier ist $\Psi(z)$ keine einfach periodische Funktion, so daß eine Zusammenfassung nach (80) nicht möglich ist. Die Ausdrücke für die Spannungen (7a) und (7b) werden jedoch, wie auch die hyperkomplexe Spannungsfunktion erwarten läßt, einfach periodische Funktionen von z und $\bar{z}$.

6. Zusammenfassung und Schlußbetrachtung. Im ersten Teil der Arbeit werden die komplexen und hyperkomplexen Spannungsfunktionen als Mittel zur Lösung ebener Elastizitätsaufgaben eingeführt. In beiden Darstellungsarten werden die Bedingungen angegeben, die in mehrfach zusammenhängenden Bereichen zusätzlich erfüllt werden müssen, das Verhalten der Spannungsfunktionen gegenüber einer Verschiebung des Koordinatensystems wird untersucht, und die Spannungskomponenten werden in krummlinig orthogonalen Koordinaten ausgedrückt.

Es wird gezeigt, daß sich in einfacher Weise ein in komplexer Darstellung vorliegendes Ergebnis in die hyperkomplexe Form überführen läßt und umgekehrt, wobei die Gestalt des Ergebnisses nur wenig verändert wird. Daraus kann geschlossen werden, daß sich die beiden

Methoden nicht grundsätzlich unterscheiden und daß auch der Arbeitsaufwand bei einer numerischen Auswertung entsprechender Formeln etwa der gleiche sein wird.

Der zweite Teil behandelt die Anwendungsmöglichkeiten. In komplexer Darstellung werden Methoden aufgezeigt, die ebene Elastizitätsaufgaben von großer Allgemeinheit, auch für Bereiche, die von mehreren beliebigen Konturen begrenzt sind, exakt oder in beliebig genauer Näherung zu lösen gestatten. Lösungen in hyperkomplexer Darstellung sind bisher nur für Bereiche, die von Geraden oder Kreisen begrenzt sind, auf denen bestimmte Randwerte zu Null werden, bekannt. In diesen Fällen wurde die hyperkomplexe Lösung der komplexen gegenübergestellt, um die Ähnlichkeit der beiden Darstellungsarten erkennen zu lassen.

Es wurde gefunden, daß in manchen Fällen, insbesondere bei den alternierenden Lösungsmethoden für Bereiche, die von mehreren Kreisen oder Geraden begrenzt sind (wie zum Beispiel der Parallelstreifen) die hyperkomplexe Funktion für die Aufstellung der Lösung besser geeignet ist.

In Ergänzung der hier gegebenen Anwendungsmöglichkeiten sei darauf hingewiesen, daß beide Verfahren auch zur Lösung von Plattenaufgaben benutzt worden sind und daß darüber hinaus bei entsprechender Anpassung der Formeln auch orthogonal anisitrope Scheiben oder Platten behandelt werden können. Auf diesen Gebieten werden noch manche interessante Ergebnisse zu erwarten sein.

Nach Abschluß dieser Arbeit wurde dem Verfasser ein Aufsatz von *R. Legendre*[1] bekannt, der sich mit dem Zusammenhang zwischen der hyperkomplexen und einer sogenannten doppelt komplexen Spannungsfunktion befaßt und ähnliche interessante Zusammenhänge aufdeckt. Das angeführte Beispiel (Kreisscheibe mit zwei im Innern aber nicht auf einem Durchmesser angreifenden Kräften) ist jedoch unvollständig, da der Einfluß der Querzahl außer acht gelassen wurde.

---

[1] *R. Legendre*, La Recherche Aeronautique 27 (1952), S. 3.

(Eingegangen am 18. April 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Kurt Stahl*, (17a) Mannheim-Feudenheim, Odenwaldstraße 12.

Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern.*

Von E. Truckenbrodt

1. Einleitung. Mit der Berechnung der Reibungsschicht an Rotationskörpern, die sich um ihre Achse drehen und gleichzeitig in Richtung der Drehachse angeströmt werden, haben sich in neuerer Zeit *H. Schlichting* und *E. Truckenbrodt* befaßt. Zunächst wurde von beiden Verfassern der Fall der angeblasenen rotierenden Scheibe in laminarer Strömung behandelt [1]. Die mittels eines Näherungsverfahrens gefundenen Ergebnisse wurden inzwischen durch exakte Rechnungen von *A. N. Tifford* und *Sheng To Chu* [2] gut bestätigt. Mittlerweile wurde das Verfahren auch auf den Fall turbulenter Strömung übertragen [3]. Das wesentliche Ergebnis der genannten Arbeiten besteht in der Berechnung des Drehmomentes der angeblasenen rotierenden Scheibe. Dabei hat sich gezeigt, daß dieses stark abhängig ist vom Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe zur Anströmungsgeschwindigkeit. Das Problem der angeblasenen rotierenden Scheibe liegt auch vor im Staupunkt des vorn stumpfen angeblasenen rotierenden Drehkörpers. Dieses sieht man sofort ein, wenn man bedenkt, daß man die Umgebung des Staupunktes durch seine senkrecht zur Anströmung stehende Ebene ersetzen kann.

Der allgemeine Fall eines angeblasenen rotierenden Drehkörpers in *laminarer Strömung* ist von *H. Schlichting* [4] bearbeitet worden. Diese Arbeit stellt eine entsprechende Erweiterung des für den Fall ebener Strömung bekannten Verfahrens von *K. Pohlhausen* [5] und *H. Holstein* und *T. Bohlen* [6] dar. Die Lösung wird zurückgeführt auf zwei miteinander gekoppelte simultane Differentialgleichungen. Aus den Ergebnissen ist wieder die starke Abhängigkeit des Drehmomentes vom Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeit zur Anströmungsgeschwindigkeit zu erwähnen.

Der noch fehlende Fall des angeblasenen sich drehenden Rotationskörpers in *turbulenter Strömung* ist Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Die hierbei gewonnenen Formeln ergeben bei sinnvoller Übertragung auf den Fall laminarer Strömung auch hierfür recht brauchbare Näherungsformeln.

Experimentelle Untersuchungen zu dem behandelten Problemkreis wurden durchgeführt von *C. Wieselsberger* [7] und *S. Luthander* und *A. Rydberg* [8].

Ein unserer Aufgabe ähnliches Problem stellt der schiebende Flügel unendlicher Spannweitenerstreckung dar. Seine theoretische Berechnung insbesondere bei turbulenter Strömung wurde erstmalig von *A. D. Young* und *T. B. Booth* [9] durchgeführt. In Abb. 1 haben wir unser Problem des angeblasenen rotierenden Drehkörpers demjenigen des schiebenden Flügels unendlicher Spannweite gegenübergestellt. Für den Teil des Drehkörpers, der nahezu zylindrisch ist, stellt die Oberseite des Flügels die abgewickelte Oberfläche des Drehkörpers (gestrichelte

---

* Die vorliegende Arbeit stellt den zweiten Teil einer von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Habilitationsschrift mit dem Titel „Die Strömung um rotierende Drehkörper bei axialer Anströmung" dar. (Berichter Prof. Dr. *H. Schlichting*, Mitberichter Prof. Dr. *H. Blenk*.) Der erste Teil mit dem Titel „Die turbulente Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe" wird in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheinen.

Diese Untersuchungen wurden mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Institut für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig ausgeführt.

[1] *H. Schlichting u. E. Truckenbrodt*, Z. angew. Math. Mech., 32 (1952), S. 97; vgl. auch Journ. Aeron. Sc. 18 (1951), S. 638.

[2] *A. N. Tifford* u. *Sheng To Chu*, Journ. Aeron. Sc. 19 (1952), S. 284.

[3] *E. Truckenbrodt*, Die Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe bei turbulenter Strömung; erscheint demnächst in der Z. angew. Math. Mech.

[4] *H. Schlichting*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 227.

[5] *K. Pohlhausen*, Z. angew. Math. Mech., 1 (1921), S. 252.

[6] *H. Holstein* u. *T. Bohlen*, Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von *K. Pohlhausen* genügen, Lilienthal-Bericht S. 10 (1940), S. 5.

[7] *C. Wieselsberger*, Physik. Z. 28 (1927), S. 84.

[8] *S. Luthander* u. *A. Rydberg*, Physik. Z. 36 (1935), S. 552.

[9] *A. D. Young* u. *T. B. Booth*, Aeronaut. Quarterly, 3 (1951/52), S. 211.

Fläche) dar. Die Geschwindigkeitskomponente in Spannweitenrichtung V_∞ entspricht der Umfangsgeschwindigkeit $v_0 = \omega R$, und die Geschwindigkeitskomponente in Sehnenrichtung U der Geschwindigkeitskomponente in meridionaler Richtung U am Drehkörper.

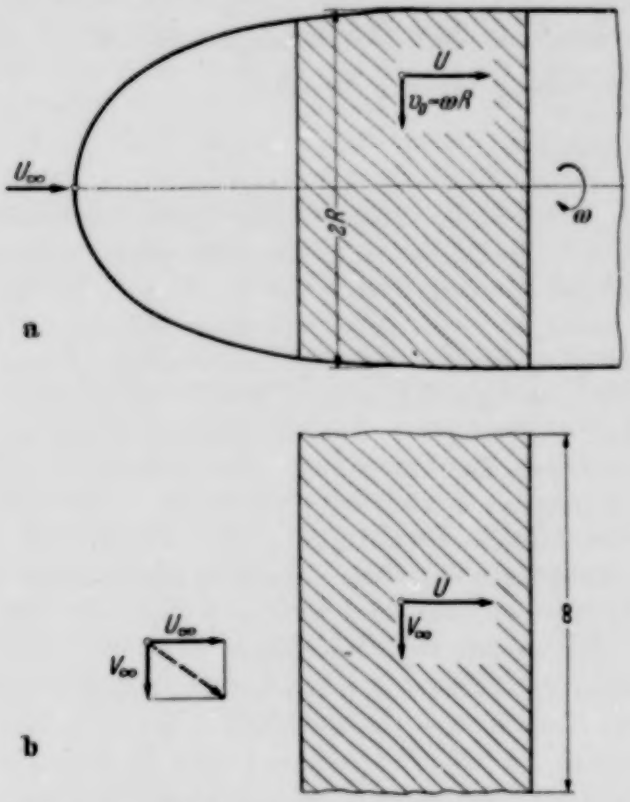

Abb. 1. Gegenüberstellung eines angeströmten sich drehenden Rotationskörpers (*a*) mit einem schiebenden Körper unendlicher Spannweite (*b*).

2. Die Grundgleichungen. Die Ausgangsgleichungen für unser Verfahren bilden die *Prandtl*schen Grenzschichtgleichungen. Diese gelten unter der Annahme, daß die Umdrehungsgeschwindigkeiten nicht allzu groß im Vergleich zur Anströmungsgeschwindigkeit sind.

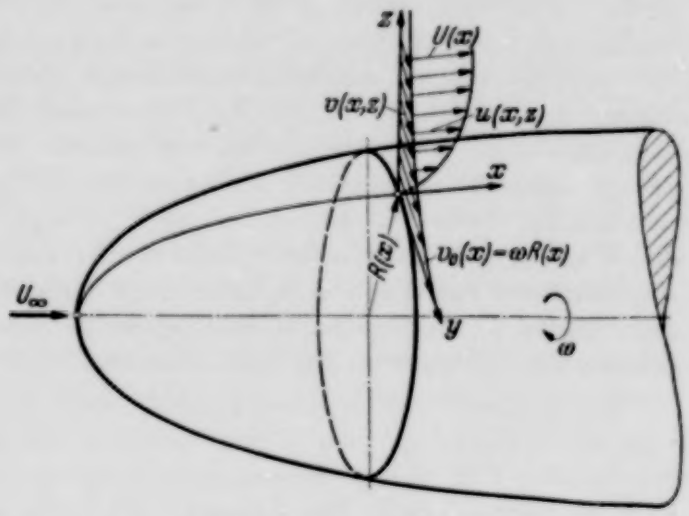

Abb. 2. Erläuterungsskizze: Geschwindigkeiten x: u, U; y: v, $v_0 = \omega R$; z: w. Schubspannungen x: τ_x; y: τ_y

Lediglich für den Sonderfall der angeblasenen rotierenden Scheibe läßt sich mit den Grenzschichtmethoden der gesamte Bereich von der angeblasenen stillstehenden Scheibe bis zur nicht angeblasenen rotierenden Scheibe erfassen. Ist die Reibungsschichtdicke δ klein im Vergleich zum Körperhalbmesser, dann gilt für den angeblasenen rotierenden Drehkörper in meridionaler Richtung

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = U\frac{dU}{dx} + \frac{v^2}{R}\frac{dR}{dx} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau_x}{\partial z} \tag{1}$$

und in azimutaler Richtung

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{u\,v}{R}\frac{dR}{dx} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau_y}{\partial z}. \tag{2}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial (u\,R)}{\partial x} + \frac{\partial (w\,R)}{\partial z} = 0\,. \tag{3}$$

Die Randbedingungen sind

$$z = 0 : u = 0\,, \quad v = v_0 = \omega\,R\,, \quad w = 0\,; \quad z = \delta : u = U\,, \quad v = 0\,. \tag{4}$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen geht aus Abb. 2 hervor. Es verlaufen x in meridionaler Richtung, y in azimutaler Richtung (Umfangsrichtung) und z senkrecht zu diesen beiden Richtungen. $R(x)$ stellt die Abhängigkeit des Körperhalbmessers von der Lauflänge x dar. Die Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Reibungsschicht in Richtung der drei Achsen x, y und z werden mit u, v und w bezeichnet. $U(x)$ ist die außerhalb der Reibungsschicht ($z \geq \delta$) vorgegebene Potentialgeschwindigkeit. Die Größe $v_0(x) = \omega\,R$ gibt die von x abhängige Umfangsgeschwindigkeit an, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der der Körper um seine Längsachse dreht. Die Bezeichnungen τ_x und τ_y stellen die Schubspannungskomponenten in x- und y-Richtung dar, und ϱ ist die Dichte des strömenden Mediums.

Durch Integrationen der Gleichungen (1) und (2) über den Wandabstand von $z = 0$ bis $z = \delta$ (δ = Grenzschichtdicke) und Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (3) ergeben

sich zwei Impulsgleichungen in meridionaler und azimutaler Richtung. Die von *H. Schlichting*[1] abgeleiteten Impulsgleichungen gelten sowohl für die laminare Strömung als auch für die turbulente Strömung, so daß wir sie sofort übernehmen können. Sie lauten in etwas anderer Schreibweise

für die *meridionale Richtung*

$$\frac{1}{U^2 R}\frac{d}{dx}(U^2 R\,\vartheta_x)+\frac{\delta_x^*}{U}\frac{dU}{dx}+\left(\frac{v_0}{U}\right)^2\frac{\vartheta_y}{R}\frac{dR}{dx}=\frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2} \tag{5}$$

und für die *azimutale Richtung*

$$\frac{1}{v_0 R^3}\frac{d}{dx}(U R^3\,\vartheta_{xy})=-\frac{\tau_{y0}}{\varrho v_0^2}. \tag{6}$$

Hierin bezeichnen

$$\vartheta_x=\int_0^\delta\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz, \tag{7}$$

$$\vartheta_y=\int_0^\delta\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 dz, \tag{8}$$

Impulsverlustdicken,

$$\vartheta_{xy}=\int_0^\delta\frac{u}{U}\frac{v}{v_0}\,dz \tag{9}$$

$$\delta_x^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U}\right)dz \qquad \text{Verdrängungsdicke,} \tag{10}$$

$$\frac{v_0}{U}=\frac{\omega R}{U} \qquad \text{Drehparameter} \tag{11}$$

und τ_{x0} und τ_{y0} die Wandschubspannungskomponenten in meridionaler und azimutaler Richtung.

Die Formeln (5) und (6) stellen die Grundgleichungen unserer Aufgabe dar. Um sie anwenden zu können, sind jedoch noch einige Angaben über die Wandschubspannungskomponenten erforderlich. Hierüber wird im nächsten Abschnitt berichtet werden.

3. Die Ansätze für die Wandschubspannungskomponenten. Während für die laminare Strömung ein fester Zusammenhang zwischen den Wandschubspannungskomponenten und den Geschwindigkeitsgradienten an der Wand in der Form

$$\tau_{x0}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} \qquad \text{und} \qquad \tau_{y0}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} \tag{12}$$

besteht, liegen die Verhältnisse bei der turbulenten Strömung nicht so einfach. Wir sind hierfür wie bisher bei allen turbulenten Strömungen auf Näherungsansätze angewiesen. Da es sich bei unserem Problem um eine dreidimensionale Reibungsschicht handelt, deren Verhalten im Einzelnen nicht ganz einfach zu übersehen ist, gehen wir bei der Betrachtung so vor, daß wir zunächst den nahezu zylindrischen Teil des Drehkörpers, $dR/dx \approx 0$, behandeln. Wie wir bereits in der Einleitung zeigten, verhält sich dieser Teil ähnlich wie ein schiebender unendlich langer Flügel, so daß wir die hierfür bekannten Ergebnisse übernehmen können. Daran anschließend untersuchen wir den Fall, daß die Oberfläche des Drehkörpers kegelig ist, $dR/dx \neq 0$. Die stärkste Änderung des Körperhalbmessers mit der Lauflänge ergibt sich im Staupunkt, wo $dR/dx = 1$ wird. Wie wir schon in der Einleitung erwähnten, ist die Lösung hierfür bereits durch die Untersuchungen an der angeblasenen rotierenden Scheibe bekannt. Wir werden die Wandschubspannungskomponenten in meridionaler und azimutaler Richtung im folgenden getrennt voneinander behandeln.

a) Die Wandschubspannungskomponente in meridionaler Richtung. Die Untersuchungen von *A. D. Young* und *T. B. Booth*[2] sowie *N. Rott* und

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 21.
[2] Siehe Fußnote 9 von S. 21.

L. F. Crabtree [1] am schiebenden unendlich langen Flügel haben ergeben, daß die Wandspannungskomponente in Sehnenrichtung von der Querströmung in Spannweitenrichtung unabhängig ist. Auf unsere Verhältnisse übertragen bedeutet das, daß die Wandschubspannungskomponente in meridionaler Richtung für den Teil des Drehkörpers, der nahezu zylindrisch ist, von der Drehung des Körpers nicht abhängt:

$$\frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2} = \left(\frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2}\right)_{v_0=0} \qquad (R = \text{konst.}). \tag{13}$$

Unter dieser Annahme ergibt sich aber, wie wir sofort aus Gleichung (5), in der das letzte Glied auf der linken Seite verschwindet, ersehen, daß die Impulsverlustdicke ϑ_x und die Verdrängungsdicke δ_x^* durch die Drehung unverändert bleiben.

Ist die Oberfläche des Drehkörpers jetzt kegelig, so kommt noch die Wirkung der Zentrifugalkraft auf die Reibungsschicht hinzu. Nehmen wir auch hierfür weiterhin an, daß sich die Impulsverlustdicke und die Verdrängungsdicke nicht mit der Drehung ändern[2], dann folgt aus der Impulsgleichung (5) für die Wandschubspannungskomponente in meridionaler Richtung sofort

$$\frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2} = \left(\frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2}\right)_{v_0=0} + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{\vartheta_y}{R}\frac{dR}{dx} \qquad (R \neq \text{konst.}). \tag{14}$$

Daß dieser Ansatz auch die Verhältnisse im Staupunkt, wo $dR/dx = 1$ ist, gut wiedergibt, kann man durch Vergleich mit der Wandschubspannungskomponente in radialer Richtung bei der angeblasenen rotierenden Scheibe zeigen. Für mäßige Umfangsgeschwindigkeiten im Vergleich zur Anströmungsgeschwindigkeit kann das aus der Zentrifugalwirkung in (14) herrührende Glied vernachlässigt werden.

b) Die Wandschubspannungskomponente in azimutaler Richtung. Von *Young-Booth* und *Rott-Crabtree* werden keine Angaben über einen Ansatz für die Wandschubspannungskomponente in Spannweitenrichtung des schiebenden unendlich langen Flügels gemacht, so daß wir hierauf nicht zurückgreifen können. Für den nahezu zylindrischen Teil des Drehkörpers wollen wir setzen $R = \text{konst.}$ und $U = \text{konst.}$ Aus den Impulsgleichungen (5) und (6) folgt dann

$$\frac{d\vartheta_x}{dx} = \frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d\vartheta_{xy}}{dx} = -\frac{v_0}{U}\frac{\tau_{y0}}{\varrho v_0^2} \qquad (R = \text{konst.}). \tag{15}$$

Wenn wir jetzt annehmen, daß zwischen den Geschwindigkeitsverteilungen in meridionaler und azimutaler Richtung Ähnlichkeit besteht, derart, daß man $v/v_0 = 1 - u/U$ setzen kann, dann ergibt sich aus (7) und (9) Gleichheit für die Impulsverlustdicken $\vartheta_{xy} = \vartheta_x$. Unter Beachtung dieses Ergebnisses erhalten wir die folgende Beziehung zwischen den beiden Wandschubspannungskomponenten

$$\tau_{y0} = -\frac{v_0}{U}\tau_{x0} \qquad (R = \text{konst.}). \tag{16}$$

Als Ergebnis haben wir also gefunden, daß sich die Wandschubspannungskomponenten in azimutaler und radialer Richtung verhalten wie die Umfangsgeschwindigkeit zur Anströmungsgeschwindigkeit.

Für die Wandschubspannungskomponente τ_{x0} machen wir ausgehend von den Gesetzmäßigkeiten der längsangeströmten ebenen Platte den bekannten Ansatz

$$\frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{U\vartheta_x}{\nu}\right)^n}, \tag{17}$$

worin für den laminaren Fall $n = 1$ und $\alpha = 0{,}220$ und für den turbulenten Fall $n = 1/6$ und $\alpha = 0{,}0065$ zu setzen ist. Diese Beziehung setzen wir in (16) ein und erhalten, wenn wir noch $\vartheta_x = \vartheta_{xy}$ berücksichtigen, für die Wandschubspannungskomponente in Umfangsrichtung

$$\frac{\tau_{y0}}{\varrho v_0^2} = -\frac{U}{v_0}\frac{\alpha}{\left(\frac{U\vartheta_{xy}}{\nu}\right)^n}. \tag{18}$$

[1] *N. Rott* u. *L. F. Crabtree*, Journ. Aeron. Sc. 19, (1952), S. 553.

[2] Diese Annahme wird für die laminare Strömung durch die Rechnungen von *H. Schlichting* sehr gut bestätigt.

Diese Gleichung gilt entsprechend den oben gemachten Angaben zunächst für den Fall, daß $R = \text{konst.}$ und $U = \text{konst.}$ sind. Wir wollen sie sinngemäß auf den Fall übertragen, daß die Körperoberfläche kegelig ist, $R \neq \text{konst.}$ und $U \neq \text{konst.}$, indem wir für R und U die von x abhängigen Werte einsetzen. Eine Begründung hierzu sei noch im folgenden gegeben: Nach der Impulsgleichung (6) ist die Wandschubspannungskomponente abhängig von der *Reynolds*schen Zahl $U\,\vartheta_{xy}/\nu$ und von der Lauflänge x. Die von x abhängigen Größen sind die Verteilung des Körperhalbmessers $R(x)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $U(x)$ in meridionaler Richtung. Wenn wir annehmen, daß zwischen diesen beiden Größen ein eindeutiger Zusammenhang besteht, dann können wir auch schreiben

$$\frac{\tau_{y0}}{\varrho\, v_0^2} = g\left(\frac{U\,\vartheta_{xy}}{\nu}, \frac{U}{v_0}\right). \tag{19}$$

Diese Abhängigkeit wird von (18) richtig wiedergegeben, so daß wir sie auch für den allgemeinen Fall als gültig ansehen wollen. Daß (18) auch für die Staupunktströmung brauchbar ist, zeigt wieder ein Vergleich mit den Ergebnissen an der angeblasenen rotierenden Scheibe.

Den Wert α in (17) bzw. (18) können wir in Beziehung setzen zum Widerstandsbeiwert c_f einer mit der Geschwindigkeit U_∞ längsangeströmten ebenen Platte der Länge l. Man findet dabei den Ausdruck

$$(1+n)\,\alpha = \left(\frac{U_\infty l}{\nu}\right)^n \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1+n}, \tag{20}$$

der sich aus dem folgenden allgemein geschriebenen Widerstandsgesetz ergibt:

$$c_f = c\left(\frac{U_\infty l}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}}. \tag{21}$$

Im laminaren Fall ist $n = 1$ und $c = 1{,}328$. Im turbulenten Fall gilt nach *Falkner* $n = 1/6$ und $c = 0{,}0306$. Will man mit der älteren Formel von *Prandtl* rechnen, dann ist $n = 1/4$ und $c = 0{,}074$.

4. Die Berechnung der Impulsverlustdicken. Wir setzen jetzt die Ergebnisse des vorigen Abschnittes in die Impulsgleichungen (5) und (6) ein und leiten daraus einfache Quadraturformeln zur Berechnung der Impulsverlustdicken ϑ_x und ϑ_{xy} ab. Wegen der Ansätze für die Wandschubspannungskomponenten τ_{x0} und τ_{y0} nach (14) und (18) werden die beiden Impulsgleichungen voneinander unabhängig, so daß wir sie im folgenden getrennt voneinander behandeln können [1].

a) Die Impulsverlustdicke ϑ_x. Setzen wir (14) in (5) ein, dann erhalten wir für die Impulsgleichung in meridionaler Richtung

$$\frac{1}{U^2 R}\frac{d}{dx}(U^2\, R\, \vartheta_x) + \frac{\delta_x^*}{U}\frac{dU}{dx} = \left[\frac{\tau_{x0}}{\varrho U^2}\right]_{v_0=0}. \tag{22}$$

Unter den gemachten Annahmen für die Wandschubspannungskomponente in meridionaler Richtung folgt, daß die Impulsgleichung in meridionaler Richtung unabhängig von der Drehung des Körpers wird. Zur Lösung von (22) können wir daher unmittelbar die Formeln anwenden, die der Berechnung der Impulsverlustdicke ϑ des nicht drehenden Körpers dienen. Wir benutzen hier die Quadraturformel von *E. Truckenbrodt* [2]

$$\frac{\vartheta_x}{l} = \frac{\left[C_1^* + \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1+n} \int_{x_1/l}^{x/l} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+2n}\left(\frac{R}{l}\right)^{1+n} d\,\frac{x}{l}\right]^{\frac{1}{1+n}}}{\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^3 \frac{R}{l}}. \tag{23}$$

Hierin bedeuten U_∞ die Anströmungsgeschwindigkeit des Körpers, l seine Länge (oder eine sonst anderswie definierte Länge) und c_f den Reibungsbeiwert einer mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmten ebenen Platte der Länge l. Bei laminarer Strömung ist $n = 1$ und bei turbulenter Strömung $n = 1/6$ zu setzen.

[1] In dem Verfahren von *H. Schlichting*, Fußnote 4 von S. 21, für den laminaren Fall bleibt die Kopplung beider Impulsgleichungen dadurch erhalten, daß die Reibungsschichtdicken in meridionaler Richtung δ_x und in azimutaler Richtung δ_y voneinander verschieden angenommen werden und zu den beiden Unbekannten des Problems werden.

[2] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 211; vgl. auch Journ. Aeron. Sc. 19 (1952), S. 428.

Die Integrationskonstante C_1^* folgt aus dem laminaren Wert für die Impulsverlustdicke ϑ_x im Umschlagspunkt $x = x_1$:

$$C_1^* = \left[\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^3 \frac{R}{l}\frac{\vartheta_x}{l}\right]_{(x=x_1)}^{1+n} = \left[\frac{c_{fl}}{2}\left(\int_0^{x_1/l}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^5\left(\frac{R}{l}\right)^2 d\,\frac{x}{l}\right)^{1/2}\right]^{1+n}. \tag{24}$$

Bei voll-laminarer bzw. voll-turbulenter Strömung ist mit $x_1 = 0$ auch $C_1^* = 0$.

b) Die Impulsverlustdicke ϑ_{xy}. Aus (6) erhalten wir mit (18)

$$\frac{d}{dx}(U R^3 \vartheta_{xy}) = \frac{\alpha}{\left(\frac{U\vartheta_{xy}}{\nu}\right)^n} U R^3. \tag{25}$$

Wie man leicht zeigen kann, läßt sich diese Differentialgleichung geschlossen lösen. Man macht hierzu zweckmäßig die Substitution

$$\chi = U R^{3(1+n)}\left(\frac{U\vartheta_{xy}}{\nu}\right)^n \vartheta_{xy}.$$

Als Ergebnis der Integration erhalten wir

$$\left(\frac{U\vartheta_{xy}}{\nu}\right)^n \vartheta_{xy} = \frac{K_1 + (1+n)\,\alpha \int_{x_1}^{x} U R^{3(1+n)}\,dx}{U R^{3(1+n)}}. \tag{26}$$

Die Größe $(1+n)\,\alpha$ drücken wir jetzt nach (20) durch den Reibungsbeiwert c_f einer mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmten ebenen Platte der Länge l aus. Dann ergibt sich nach ϑ_{xy} aufgelöst

$$\frac{\vartheta_{xy}}{l} = \frac{\left[K_1^* + \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1+n}\int_{x_1/l}^{x/l}\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{R}{l}\right)^{3(1+n)} d\,\frac{x}{l}\right]^{\frac{1}{1+n}}}{\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{R}{l}\right)^3}. \tag{27}$$

Bei laminarer Strömung ist $n = 1$, bei turbulenter Strömung $n = 1/6$ zu setzen.

Die Integrationskonstante K_1^* bestimmt sich wieder aus dem laminaren Wert für die Impulsverlustdicke ϑ_{xy} im Umschlagspunkt $x = x_1$.

$$K_1^* = \left[\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{R}{l}\right)^3\frac{\vartheta_{xy}}{l}\right]_{(x=x_1)}^{1+n} = \left[\frac{c_{fl}}{2}\left(\int_0^{x_1/l}\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{R}{l}\right)^6 d\,\frac{x}{l}\right)^{1/2}\right]^{1+n}. \tag{28}$$

Bei voll-laminarer bzw. voll-turbulenter Strömung ist mit $x_1 = 0$ auch $K_1^* = 0$.

Bemerkenswert an der Formel (27) ist, daß die Impulsverlustdicke ϑ_{xy} unabhängig von der Drehgeschwindigkeit ist. Auch dieses Ergebnis wurde für den laminaren Fall von *H. Schlichting* gefunden.

Vergleicht man die beiden Formeln für die Impulsverlustdicken (23) und (27), so stellt man fest, daß bei der Impulsverlustdicke in meridionaler Richtung ϑ_x die Geschwindigkeitsverteilung stärker eingeht als bei der Impulsverlustdicke ϑ_{xy}. Bezüglich der Verteilung des Körperhalbmessers liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt.

5. Die Abschätzung der Lage des Ablösungspunktes. Durch die Drehbewegung wird die Lage des Ablösungspunktes verändert werden. Eine genauere Berechnung ist jedoch zur Zeit noch nicht möglich, da selbst im Fall der ruhenden Wand das Kriterium für die Ablösung nur angenähert bekannt ist. Wir müssen uns deshalb damit begnügen, die Lage des Ablösungspunktes grob abzuschätzen. Zu einer genaueren Ermittlung müßte man die Verteilung der Schubspannungen über die Reibungsschichtdicke kennen, um daraus ähnlich wie für den Fall des nicht drehenden Körpers eine Gleichung für den das Geschwindigkeitsprofil in der Reibungsschicht kennzeichnenden Formparameter herzuleiten.

Wir wollen ähnlich wie im laminaren Fall vorgehen. Dort wird als charakteristischer Parameter

$$\varkappa^* = \frac{U\vartheta_x}{\nu}\vartheta_x\left[\frac{1}{U}\frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2\frac{1}{R}\frac{dR}{dx}\right] \tag{29}$$

eingeführt. Erreicht $\varkappa^* = \varkappa_A^*$ einen bestimmten Wert (nach dem *Pohlhausen*-Verfahren $\varkappa_A^* = -0{,}1567$), dann tritt Ablösung ein.

Man kann sich überlegen, daß im turbulenten Fall ein entsprechender Parameter folgendermaßen lauten müßte:

$$\Gamma = \left(\frac{U\vartheta_x}{\nu}\right)^n \vartheta_x \left[\frac{1}{U}\frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{1}{R}\frac{dR}{dx}\right]. \tag{30}$$

Für den Fall ohne Drehung ($v_0 = 0$) geht Γ mit $n = 1/4$ in den von *Buri*[1] verwendeten Parameter über. Wie im laminaren Fall nehmen wir nun an, daß Ablösung eintritt, wenn Γ einen bestimmten Zahlenwert erreicht hat. Diesen zunächst noch unbekannten Wert Γ_A bestimmen wir aus den Verhältnissen des nicht drehenden Körpers zu

$$\Gamma_A = \left[\left(\frac{U\vartheta_x}{\nu}\right)^n \frac{\vartheta_x}{U}\frac{dU}{dx}\right]_{x_{A0}}. \tag{31}$$

Hierin bedeutet x_{A0} die Lage des Ablösungspunktes für $v_0 = 0$. Für die Impulsverlustdicken ϑ_x nehmen wir aus dem im vorigen Abschnitt Gesagten an, daß sie von der Drehgeschwindigkeit unabhängig sind.

Die Lage des Ablösungspunktes x_{A0} ermitteln wir z. B. nach dem Verfahren von *E. Truckenbrodt*[2]. Es soll an dieser Stelle auf Einzelheiten einer solchen Rechnung nicht näher eingegangen werden.

Die Bestimmungsgleichung für die Lage des Ablösungspunktes lautet jetzt nach (30) und (31)

$$\frac{\vartheta_x}{l}(x_A) = \frac{\left[\frac{\vartheta_x}{l}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{\frac{n}{1+n}}\left(\frac{l}{U}\frac{dU}{dx}\right)^{\frac{1}{1+n}}\right]_{x_{A0}}}{\left[\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{\frac{n}{1+n}}\left[\frac{l}{U}\frac{dU}{dx} + \left(\frac{v_0}{U}\right)^2 \frac{l}{R}\frac{dR}{dx}\right]^{\frac{1}{1+n}}\right]_{x_A}}. \tag{32}$$

Nach dieser Beziehung berechnet man für verschiedene Werte x_A die Impulsverlustdicken ϑ_x/l und bringt diese Kurve zum Schnitt mit der Kurve für ϑ_x/l nach (23). Der Schnittpunkt liefert dann den gesuchten Abszissenwert x_A. Man vergleiche hierzu das Beispiel der Kugel, Abb. 4.

Da im Druckanstiegsgebiet, wo Ablösung auftreten kann, sowohl dU/dx als auch dR/dx gewöhnlich negativ sind, folgt, daß im allgemeinen $\vartheta_x(x_A) < \vartheta_x(x_{A0})$ wird. Das bedeutet aber auch, daß die Ablösung beim drehenden Körper früher eintritt als beim nicht drehenden Körper. Auch dieses Ergebnis wird für den laminaren Fall von *H. Schlichting* bestätigt.

6. Die Quadraturformel zur Berechnung des Drehmomentes. Die Berechnung des durch die Drehbewegung entstehenden Drehmomentes läßt sich in einfacher Weise durchführen. Es braucht hierbei lediglich über die in Umfangsrichtung wirkenden Schubspannungskomponenten τ_{y0} integriert zu werden.

Das gesamte Drehmoment erhält man zu

$$M = -2\pi \int_0^{x_2} \tau_{y0} R^2 \, dx. \tag{33}$$

Es ist x_2 die Bogenlänge des Körpers in meridionaler Richtung vom Staupunkt aus gemessen. Löst die Reibungsschicht ab, so ist der Punkt, bis zu dem die Integration auszuführen ist, nicht mehr klar definiert. Wie man aber aus den durchgerechneten Beispielen ersieht, spielt die Größe x_2 keine entscheidende Rolle, so daß man keinen großen Fehler macht, wenn man bis zum Körperheck die Integration erstreckt.

Die Schubspannungskomponente τ_{y0} entnehmen wir der Impulsgleichung für die azimutale Richtung (6) mit $v_0 = \omega R$ zu

$$\tau_{y0} R^2 = -\varrho\,\omega \frac{d}{dx}(UR^3 \vartheta_{xy}). \tag{34}$$

---

[1] *E. Buri*, Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung, Dissertation, Zürich (1931); vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, S. 422, Karlsruhe (1951).

[2] Siehe Fußnote 2 von S. 25.

Diesen Wert setzen wir in (33) ein und finden nach Ausführen der Integration

$$M = 2\pi\varrho\,\omega\,(U\,R^3\,\vartheta_{xy})_{(x=x_0)}\,. \tag{35}$$

Einen Momentenbeiwert definieren wir folgendermaßen:

$$c_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2}\,V_m^2\,R_m^2\,l}\,. \tag{36}$$

Hierin ist R_m der größte Körperhalbmesser (Radius des Hauptspantquerschnittes), $V_m = \omega R_m$ die zugehörige Umfangsgeschwindigkeit und l eine beliebig definierte Körperlänge. Die Definition für c_M geht für die rotierende Scheibe mit $l = R_m$ in die früher angegebene Formel über.

In die Momentenformel (35) setzen wir jetzt die Formel (27) für die Impulsverlustdicke ϑ_{xy} ein und finden für den Momentenbeiwert nach (36)

$$c_M = 4\pi\frac{U_\infty}{V_m}\left[K_1^* + \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1+n}\int\limits_{x_1/l}^{x_2/l}\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{R}{R_m}\right)^{3(1+n)}d\frac{x}{l}\right]^{\frac{1}{1+n}}. \tag{37}$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus dem laminaren Wert für die Impulsverlustdicke ϑ_{xy} an der Stelle x_1 zu

$$K_1^* = \left[\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{R}{R_m}\right)^3\frac{\vartheta_{xy}}{l}\right]^{1+n}_{(x=x_1)} = \left[\frac{c_{fl}}{2}\left(\int\limits_0^{x_1/l}\frac{U}{U_\infty}\left(\frac{R}{R_m}\right)^6 d\,\frac{x}{l}\right)^{1/2}\right]^{1+n}. \tag{38}$$

Über die Widerstandsbeiwerte c_f der ebenen Platte als Funktionen der *Reynolds*schen Zahl $U_\infty l/\nu$ wurde bereits berichtet, [S. 25].

Aus (37) folgt nun sofort, daß sich der Momentenbeiwert bei konstant gehaltener Anströmungsgeschwindigkeit U_∞ umgekehrt proportional der Umfangsgeschwindigkeit ändert. Weiterhin findet man aber unter Beachtung von (36), daß das Drehmoment linear mit der Umfangsgeschwindigkeit anwächst.

$$M \sim V_m \quad (U_\infty = \text{konst.})\,. \tag{39}$$

Bei voll-laminarer bzw. voll-turbulenter Strömung verschwindet mit $x_1 = 0$ auch $K_1^* = 0$ in (37). Der Drehmomentenbeiwert verhält sich dann folgendermaßen:

$$c_M \sim \frac{U_\infty}{V_m}\left(\frac{U_\infty l}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}} \sim \left(\frac{U_\infty}{V_m}\right)^{\frac{1}{1+n}}\left(\frac{V_m R_m}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}}. \tag{40}$$

Bei konstant gehaltener Umfangsgeschwindigkeit folgt dann für den Momentenbeiwert sowie das Moment selbst:

$$M \sim U_\infty^{\frac{1}{1+n}} \qquad (V_m = \text{konst.})\,. \tag{41}$$

Bei laminarer Strömung ($n = 1$) nimmt das Moment mit der Wurzel aus der Anströmungsgeschwindigkeit zu. Bei turbulenter Strömung ($n = 1/6$) wächst es nahezu linear mit der Anströmungsgeschwindigkeit. Das Ergebnis im laminaren Fall ist wieder in Übereinstimmung mit den Angaben von *H. Schlichting*.

Auf eine Berechnung des Strömungswiderstandes (Reibungs- und Druckwiderstand) wird verzichtet, da hierfür die Entwicklung des Nachlaufes hinter dem drehenden Rotationskörper bekannt sein müßte. Hierfür fehlen aber noch jegliche Angaben sowohl theoretischer wie auch experimenteller Art. Eine weitere wichtige Tatsache ist aber die, daß gerade diejenigen Körper, wie z. B. Geschosse, von denen man den Widerstand kennen möchte, am hinteren Ende scharf abgeschnitten sind, wodurch sich ein stark abgelöstes Totwasser hinter dem Körper ausbildet. Dadurch wird aber der Widerstand entscheidend bestimmt, wie auch aus einer Näherungsbetrachtung von *C. Wieselsberger*[1] hervorgeht.

7. Beispiele. a) Rotierende Scheibe. Wie bereits in Ziff. 1 erwähnt wurde, liegen für die angeblasene rotierende Scheibe sowohl im laminaren wie auch turbulenten Fall theoretische Rechnungen vor.

[1] Siehe Fußnote 7 von S. 21.

Potentialtheoretisch verhält sich die angeblasene rotierende Scheibe wie die rotationssymmetrische Staupunktsströmung. Hierfür gilt in bekannter Weise

$$U = aR\,; \qquad x = R\,, \qquad l = R_m\,. \tag{42}$$

Setzen wir in (37) $x_1 = 0$, $x_2 = R_m$ und $K_1^* = 0$, so liefert die ausgeführte Integration unter Beachtung des Widerstandsgesetzes (21)

$$c_M = A\left(\frac{a}{\omega}\right)^{\frac{1}{1+n}}\left(\frac{\omega R_m^2}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}} \tag{43}$$

mit

$$A = 2\pi c\,(5+3n)^{-\frac{1}{1+n}}. \tag{44}$$

Setzen wir die Zahlenwerte für c und n ein, dann erhält man für den laminaren Fall $A = 2{,}95$, während sich für die asymptotische Lösung der Wert $A = 3{,}17$ ergibt[1]. Für den turbulenten Fall wollen wir mit der *Prandtl*schen Widerstandsformel, d. h. mit $n = 1/4$ rechnen, um mit dem früheren Ergebnis[2] vergleichen zu können. Wir erhalten $A = 0{,}115$, während sich für die asymptotische Formel $A = 0{,}113$ ergibt. Unter der asymptotischen Lösung verstehen wir den Fall, bei dem die Umfangsgeschwindigkeit im Vergleich zur Anströmungsgeschwindigkeit klein ist. Dieses gilt etwa bis zu Werten von $a/\omega > 1$ für laminare Strömungen und $a/\omega > 2$ für turbulente Strömungen.

Unsere Untersuchung hat uns nun gezeigt, daß unsere Momentenformel (37) die angeblasene rotierende Scheibe recht befriedigend wiedergibt, wenn wir uns auf mäßige Verhältnisse von Umfangsgeschwindigkeit zu Anströmungsgeschwindigkeit beschränken.

b) Rotierende Kugel. Als zweites Beispiel wollen wir die angeblasene rotierende Kugel wählen und hierfür eine vollständige Rechnung nach dem beschriebenen Näherungsverfahren durchführen. Wir wollen uns dabei auf die Fälle voll-laminarer und voll-turbulenter Strömung beschränken.

Ist R_m der Kugelhalbmesser, dann gilt für die vom Staupunkt aus gemessene Lauflänge

$$x = R_m\,\varphi \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)\,, \tag{45}$$

und für die Verteilung des senkrecht zur Anströmungsrichtung gemessenen Körperhalbmessers

$$R = R_m \sin\varphi\,. \tag{46}$$

Als Bezugslänge l in unseren bisherigen Formeln wollen wir setzen $l = R_m$. Die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung erhält man in bekannter Weise zu

$$U = \frac{3}{2}\,U_\infty \sin\varphi\,. \tag{47}$$

Für die Impulsverlustdicken ϑ_x und ϑ_{xy} nach (23) und (27) kann man sofort zeigen, daß sie sich wegen der Proportionalität von $U \sim R$ nicht voneinander unterscheiden.

Bei voll-laminarer und voll-turbulenter Strömung setzen wir $x_1 = 0$ sowie $C_1^* = K_1^* = 0$. Wir erhalten dann

$$\frac{\vartheta}{R_m} = \frac{\vartheta_x}{R_m} = \frac{\vartheta_{xy}}{R_m} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{1+n}} \frac{c_f}{2}\,\frac{\left[\int_0^\varphi \sin^{4+3n}\varphi\,d\varphi\right]^{\frac{1}{1+n}}}{\sin^4\varphi}\,. \tag{48}$$

Im laminaren Fall läßt sich die Integration mit $n = 1$ geschlossen ausführen. Auf die Wiedergabe dieser etwas umständlichen Formel wollen wir verzichten. Das Ergebnis der Rechnung ist in Tabelle 1 angegeben und in Abb. 3 dargestellt worden. Die Übereinstimmung mit der genaueren Kurve für ϑ_x/R_m von *H. Schlichting*, die wir miteingetragen haben, ist sehr gut[3].

---

[1] Der Lösung in der in Fußnote 1 von S. 21 genannten Arbeit liegt das *Pohlhausen*-Polynom für die Geschwindigkeitsverteilung zugrunde. Hierfür ist $c = 1{,}372$. In (44) eingesetzt würde sich dann ergeben $A = 3{,}05$.

[2] Siehe Fußnote 3 von S. 21.

[3] Beachten wir das in der obigen Fußnote Gesagte, dann müßten, um den Vergleich vollständig durchzuführen, unsere Werte noch mit $1{,}372/1{,}328 = 1{,}033$ multipliziert werden, was die gute Übereinstimmung noch verbessern würde.

Für den turbulenten Fall haben wir die Integration graphisch ausgeführt und das Ergebnis in Tabelle 1 sowie Abb. 4 dargestellt. Nach dem Verfahren von *E. Truckenbrodt*[1] haben wir für die nicht drehende Kugel noch das Reibungsschichtdickenverhältnis $H = \delta_x^*/\vartheta_x$ berechnet (Tabelle 1). Wir haben dabei die *Reynolds*schen Zahlen $Re = U_\infty R_m/\nu = 10^6$ und 10^7 gewählt. Nimmt man an, daß die Reibungsschicht sich ablöst, wenn $H = 1{,}8$ wird, dann gilt $\varphi_{A0} = 126{,}5°$ für $Re = 10^6$ und bei $\varphi_{A0} = 132{,}0°$ für $Re = 10^7$.

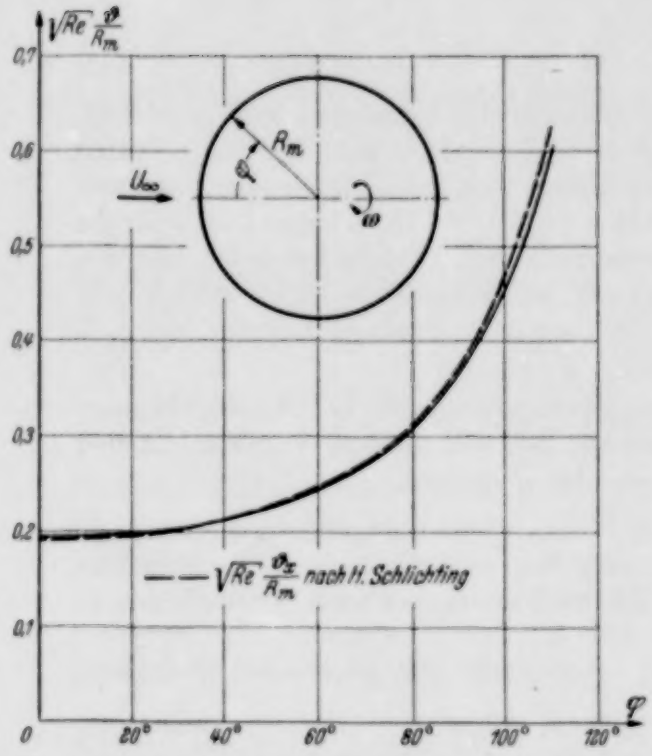

Abb. 3. Die Impulsverlustdicken ϑ_x und ϑ_{xy} für die Kugel bei *laminarer* Strömung; $\vartheta = \vartheta_x = \vartheta_{xy}$, $Re = U_\infty R_m/\nu$, $V_m = \omega R_m$.

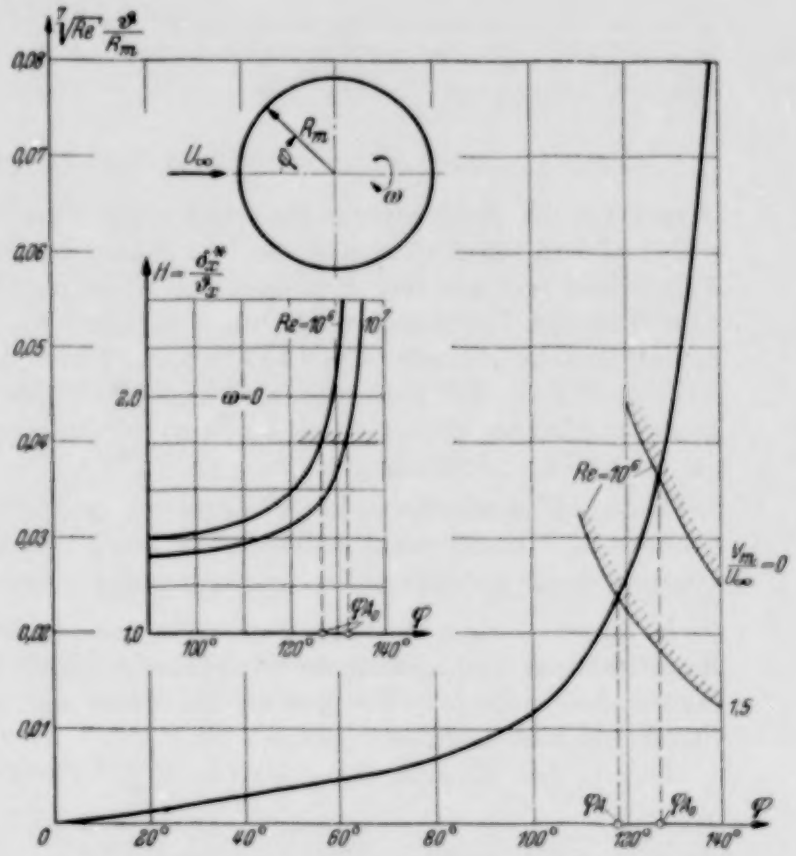

Abb. 4. Die Impulsverlustdicken ϑ_x und ϑ_{xy} für die Kugel bei *turbulenter* Strömung; $\vartheta = \vartheta_x = \vartheta_{xy}$, $Re = U_\infty R_m/\nu$, $V_m = \omega R_m$. ////////// Ablösungsbeginn.

Tabelle 1. *Die Impulsverlustdicke $\vartheta = \vartheta_x = \vartheta_{xy}$ bei laminarer und turbulenter Strömung sowie der Formparameter H bei turbulenter Strömung ($v_0 = 0$) für die Kugel; $Re = U_\infty R_m/\nu$.*

			laminar	turbulent		
$\varphi = \frac{x}{R_m}$	$\frac{R}{R_m}$	$\frac{U}{U_\infty}$	$\sqrt{Re}\cdot\frac{\vartheta}{R_m}$	$\sqrt[3]{Re}\cdot\frac{\vartheta}{R_m}$	H	
					$Re = 10^6$	10^7
0°	0,000	0,000	0,192	0		
10°	0,174	0,260				
20°	0,342	0,513				
30°	0,500	0,750	0,202	0,0020		
40°	0,643	0,964	0,212	0,0027		
50°	0,766	1,149	0,226	0,0035		
60°	0,866	1,299	0,244	0,0044		
70°	0,940	1,410	0,271	0,0054		
80°	0,985	1,477	0,309	0,0068		
90°	1,000	1,500	0,366	0,0088	1,40	1,32
100°	0,985	1,477	0,455	0,0117	1,41	1,33
110°	0,940	1,410	0,606	0,0166	1,46	1,36
120°	0,866	1,299		0,0254	1,58	1,44
130°	0,766	1,149		0,0441	2,09	1,66
140°	0,643	0,964		0,0917		

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 25.

Um jetzt die Veränderung der Lage des Ablösungspunktes mit der Drehgeschwindigkeit abschätzen zu können, gehen wir von Gleichung (32) aus, die sich für den vorliegenden Fall der Kugel folgendermaßen schreibt:

$$\frac{\vartheta_x}{R_m}(\varphi_A) = B\left(\frac{\sin^{1-n}\varphi_A}{\cos\varphi_A}\right)^{\frac{1}{1+n}} \tag{49}$$

mit

$$B = \left[\frac{\cos\varphi_{A0}}{\sin^{1-n}\varphi_{A0}\left[1+\frac{4}{9}\left(\frac{V_m}{U_\infty}\right)^2\right]}\right]^{\frac{1}{1+n}} \frac{\vartheta_x}{R_m}(\varphi_{A0}).$$

Die Kurven $\vartheta_x/R_m(\varphi_A)$ nach (49) haben wir für den turbulenten Fall mit den Kurven $\vartheta_x/R_m(\varphi)$ nach (48) zum Schnitt gebracht, vgl. Abb. 4, und daraus die Lagen der Ablösungspunkte ermittelt. Das Ergebnis unserer Untersuchung haben wir in Tabelle 2 mitgeteilt. Mitangegeben sind auch die laminaren Werte von *H. Schlichting*. Abb. 5 zeigt, wie in beiden Fällen laminarer und turbulenter Strömung der Ablösungspunkt mit wachsender Drehgeschwindigkeit nach vorn wandert, ein Ergebnis, das durch die Messungen von *Luthander* und *Rydberg* [1] bestätigt wird.

Tabelle 2. *Die Lage des Ablösungspunktes φ_A bei laminarer und turbulenter Strömung für die angeblasene rotierende Kugel; $Re = U_\infty R_m/\nu$, $V_m = \omega R_m$.*

$\frac{V_m}{U_\infty}$	laminar nach *H. Schlichting*	turbulent	
		$Re = 10^6$	10^7
0	108,2°	126,5°	132,0°
0,25	108,0°	126,2°	131,6°
0,50	107,3°	125,4°	130,8°
0,75	106,2°	124,0°	129,5°
1,00	104,9°	122,3°	127,8°
1,25		120,3°	126,1°
1,50		118,1°	124,2°

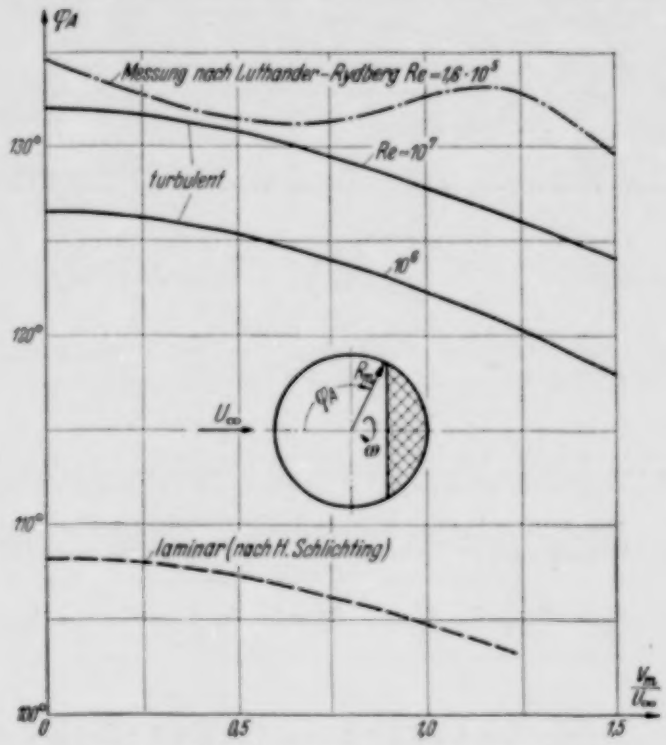

Abb. 5. Die Lage des Ablösungspunktes für die angeblasene rotierende Kugel; $Re = U_\infty R_m/\nu$, $V_m = \omega R_m$.

Den Drehmomentenbeiwert bei voll-laminarer bzw. voll-turbulenter Strömung errechnen wir nach (37) mit $x_1 = 0$ und $K_1^* = 0$ und unter Beachtung von (21) zu

$$c_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2}\omega^2 R_m^5} = 2\pi c\left(\frac{U_\infty R_m}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}} \frac{U_\infty}{V_m}\left[\frac{3}{2}\int_0^{\varphi_2}\sin^{4+3n}d\varphi\right]^{\frac{1}{1+n}} \tag{50}$$

In Abb. 6 und 7 haben wir über dem Winkel φ_2 die Werte $\sqrt{Re}\,\frac{V_m}{U_\infty}\,c_M$ für den laminaren Fall und $\sqrt[7]{Re}\,\frac{V_m}{U_\infty}\,c_M$ für den turbulenten Fall aufgetragen. Dabei ist für die *Reynolds*sche Zahl $Re = U_\infty R_m/\nu$ gesetzt worden. Es zeigt sich in beiden Fällen, daß sich der Momentenbeiwert nur noch wenig ändert, ob man bis zum Ablösungspunkt oder bis zum Körperheck die Integration erstreckt. Im laminaren Fall, Abb. 6, haben wir noch die Werte von *H. Schlichting* eingetragen, die mit unseren Werten recht gut übereinstimmen [2]. Für $\varphi_2 = \pi$ läßt sich die Integration nach (50) geschlossen ausführen und liefert

$$Re^{\frac{n}{1+n}}\frac{V_m}{U_\infty}c_M = 2\pi c\left[\frac{3\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5+3n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{6+3n}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{1+n}}. \tag{51}$$

[1] Siehe Fußnote 8 von S. 21.

[2] Die Übereinstimmung würde wieder noch besser sein, wenn wir die Unterschiede in den Ansätzen für die Widerstandsbeiwerte (vgl. Fußnote 3 auf S. 29) berücksichtigen würden.

Es bedeutet Γ die *Eulersche* Gammafunktion. Aus (51) ergibt sich für den laminaren Fall

$$c_M = \frac{9{,}76}{\sqrt{Re}} \frac{U_\infty}{V_m} \qquad \text{(laminar)} \tag{51a}$$

und entsprechend für den turbulenten Fall

$$c_M = \frac{0{,}299}{\sqrt[7]{Re}} \frac{U_\infty}{V_m} \qquad \text{(turbulent)}. \tag{51b}$$

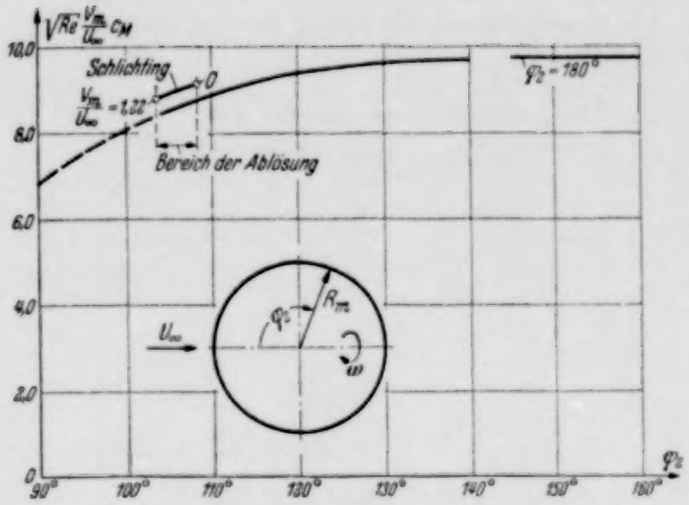

Abb. 6. Der Drehmomentenbeiwert der Kugel bei *laminarer* Strömung (φ_2 = Winkel, bis zu dem die Integration ausgeführt worden ist);

$c_M = M/\frac{\varrho}{2} V_m^2 R_m^3$; $Re = U_\infty R_m/\nu$; $V_m = \omega R_m$.

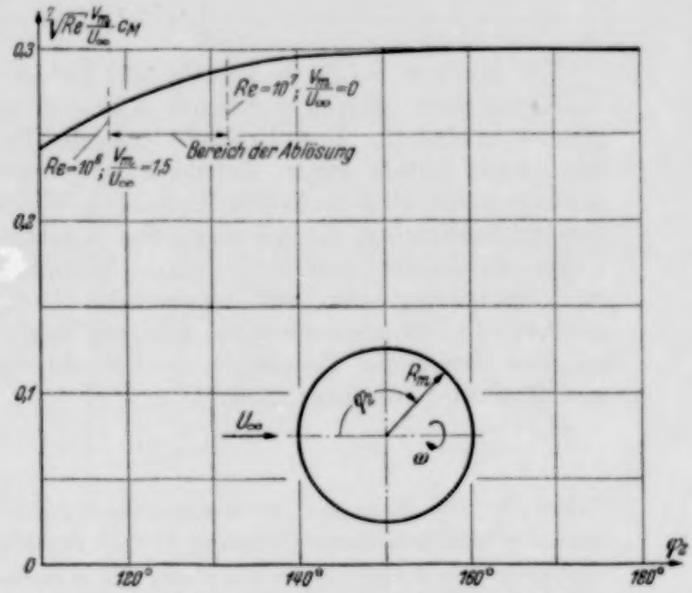

Abb. 7. Der Drehmomentenbeiwert der Kugel bei *turbulenter* Strömung (φ_2 = Winkel, bis zu dem die Integration ausgeführt worden ist);

$c_M = M/\frac{\varrho}{2} V_m^2 R_m^3$; $Re = U_\infty R_m/\nu$; $V_m = \omega R_m$.

c) **Rotierende Rotationsellipsoide.** Für die längsangeströmten sich drehenden Rotationsellipsoide wollen wir im folgenden die Drehmomentenbeiwerte nach (37) für die Fälle voll-laminarer und voll-turbulenter Strömung berechnen.

Für die Geschwindigkeitsverteilung eines in Richtung der großen Achse L mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmten Rotationsellipsoid gilt in bekannter Weise

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{U_m}{U_\infty} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + k^2\cos^2\varphi}}. \tag{52}$$

Hierbei gilt für die Körperkontur die Parameterdarstellung

$$X = \frac{L}{2}\cos\varphi \quad \text{und} \quad R = R_m \sin\varphi, \tag{53}$$

wobei X von der Ellipsenmitte aus gemessen wird. U_m ist die maximale Körpergeschwindigkeit. Sie ist eine Funktion des Achsenverhältnisses

$$k = \frac{2R_m}{L} = \frac{D}{L} \tag{54}$$

und berechnet sich zu

$$\frac{U_m}{U_\infty} = \frac{2}{2-\alpha_0}. \tag{55}$$

Zahlenwerte für α_0 sind von *A. F. Zahm* [1] angegeben worden. Für die Änderung der Lauflänge x mit dem Polarwinkel φ gilt noch

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{L}{2}\sqrt{\sin^2\varphi + k^2\cos^2\varphi}. \tag{56}$$

[1] *A. F. Zahm*, Flow and force equations for a body revolving in a fluid, NACA Report Nr. 323 (1928).

Die angegebenen Beziehungen führen wir in Gleichung (37) ein, in der wir $x_1 = 0$, $K_1^* = 0$ und $l = L$ setzen. Die Formel, die wir finden, ist dadurch besonders einfach, weil sich die Wurzel im Nenner von (52) gegen die Wurzel von (56) heraushebt. Es folgt:

$$c_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2}\omega^2 R_m^4 L} = 2\pi c_f \left[\frac{1}{2}\frac{U_m}{U_\infty}\int_0^\pi \sin^{4+3n}\varphi\, d\varphi\right]^{\frac{1}{1+n}}. \tag{57}$$

Wie wir bereits beim Beispiel der Kugel sahen, läßt sich das Integral geschlossen lösen. Wir finden, wenn wir für c_f noch die Beziehung (21) einsetzen,

$$Re^{\frac{n}{1+n}}\frac{V_m}{U_\infty}c_M = 2\pi c\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{U_m}{U_\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{5+3n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{6+3n}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{1+n}}. \tag{58}$$

Für die *Reynolds*sche Zahl gilt jetzt $Re = U_\infty L/\nu$ statt $Re = U_\infty R_m/\nu$ wie beim Beispiel der Kugel. Zahlenmäßig ergibt sich für den laminaren Fall

$$c_M = \frac{5{,}64}{\sqrt{Re}}\sqrt{\frac{U_m}{U_\infty}}\frac{U_\infty}{V_m} \qquad \text{(laminar)} \tag{58a}$$

und für den turbulenten Fall

$$c_M = \frac{0{,}117}{\sqrt[7]{Re}}\left(\frac{U_m}{U_\infty}\right)^{6/7}\frac{U_\infty}{V_m} \qquad \text{(turbulent)}. \tag{58b}$$

Die Momentenbeiwerte sind außer von der *Reynolds*schen Zahl Re und vom Geschwindigkeitsverhältnis U_∞/V_m ($V_m = \omega R_m$) noch vom Achsenverhältnis k abhängig, das die Größe U_m/U_∞ nach (55) bestimmt. Für einige Werte von k haben wir U_m/U_∞ berechnet und daraus die Momentenbeiwerte ermittelt. Das Ergebnis ist in Tabelle 3 angegeben. Danach wächst der Drehmomentenbeiwert im turbulenten Fall schneller mit dem Achsenverhältnis des Rotationsellipsoides als im laminaren Fall. In Abb. 8 haben wir den Drehmomentenbeiwert in Abhängigkeit von der *Reynolds*schen Zahl für die beiden Fälle laminarer und turbulenter Strömung für die verschiedenen Rotationsellipsoide dargestellt.

Tabelle 3. *Die Drehmomentenbeiwerte bei laminarer und turbulenter Strömung für angeblasene rotierende Rotationsellipsoide* [1];

		laminar	turbulent
k	$\frac{U_m}{U_\infty}$	$\sqrt{Re}\,\frac{V_m}{U_\infty}\,c_M$	$\sqrt[7]{Re}\,\frac{V_m}{U_\infty}\,c_M$
0	1,000	5,64	0,117
0,25	1,082	5,87	0,125
0,50	1,209	6,20	0,137
0,75	1,354	6,55	0,151
1,0	1,500	6,91	0,165

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 34.

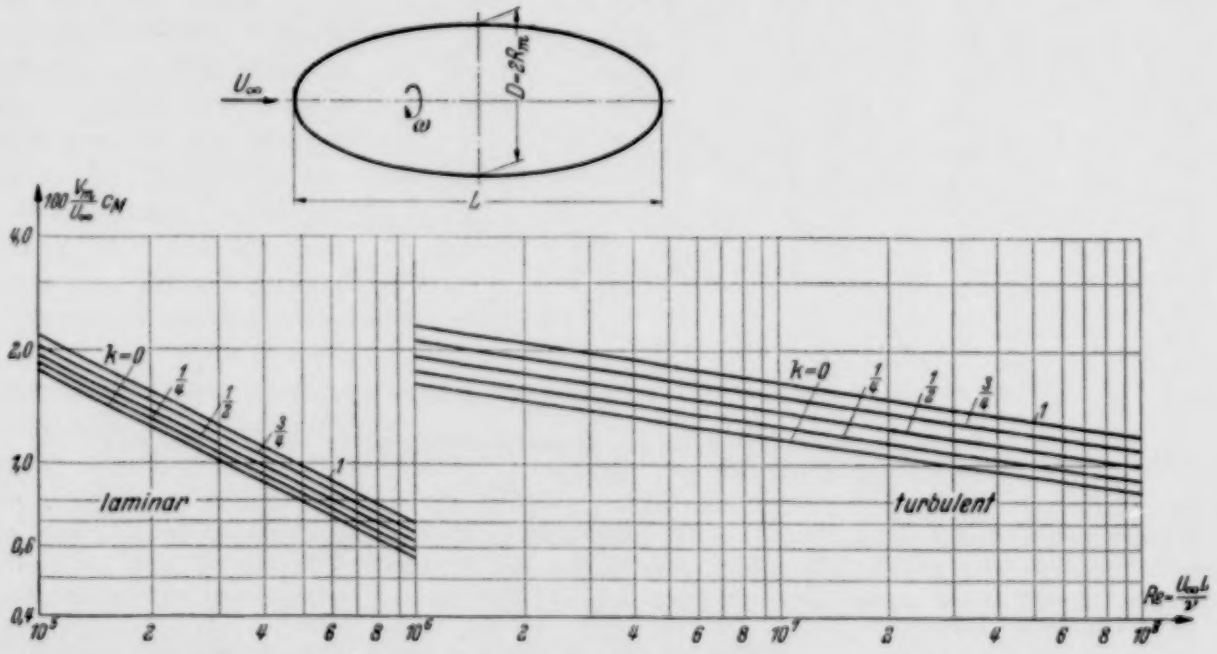

Abb. 8. Die Drehmomentenbeiwerte für Rotationsellipsoide bei laminarer und turbulenter Strömung;
$c_M = M/\frac{\varrho}{2}V_m^2 R_m^2 L$; $Re = U_\infty L/\nu$; $V_m = \omega R_m$.
Achsenverhältnis: $k = D/L$; $k = 0$: Faden; $k = 1$: Kugel

d) Rotierender Halbkörper. Als letztes Beispiel wollen wir jetzt einen rotationssymmetrischen Halbkörper behandeln, der durch Überlagerung einer räumlichen Quellströmung mit einer Translationsströmung entsteht.

Legen wir den Koordinatenanfangspunkt in den Staupunkt, dann gilt für die geometrischen Daten des Körpers die folgende Parameterdarstellung:

$$\frac{R}{R_m} = \sin\frac{\varphi}{2}, \tag{59}$$

$$\frac{x}{R_m} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}} + F\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) - E\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right). \tag{60}$$

Es sind F und E die unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $\alpha = 60°$ [2].

Bezeichnen wir mit L die Abszisse auf der Achse des Körpers vom Standpunkt aus gemessen, dann ist

$$\frac{L}{R_m} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right). \tag{61}$$

Es bedeutet R_m den Körperhalbmesser im Unendlichen $L \to \infty$. Die Quelle befindet sich im Punkt $L = \frac{1}{2} R_m$, von wo aus auch die Winkel φ gemessen werden.

Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich zu

$$\frac{U}{U_\infty} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{62}$$

Die maximale Geschwindigkeit beträgt

$$\frac{U_m}{U_\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}156 \tag{63}$$

und befindet sich an der Stelle $\cos\varphi = -1/3$, d. h. $L = 0{,}83\ R_m$.

Die geometrischen Daten sowie die Geschwindigkeitsverteilung sind in Tabelle 4 mitgeteilt. Die Momentenbeiwerte wurden für die Fälle voll-laminarer und voll-turbulenter Strömung

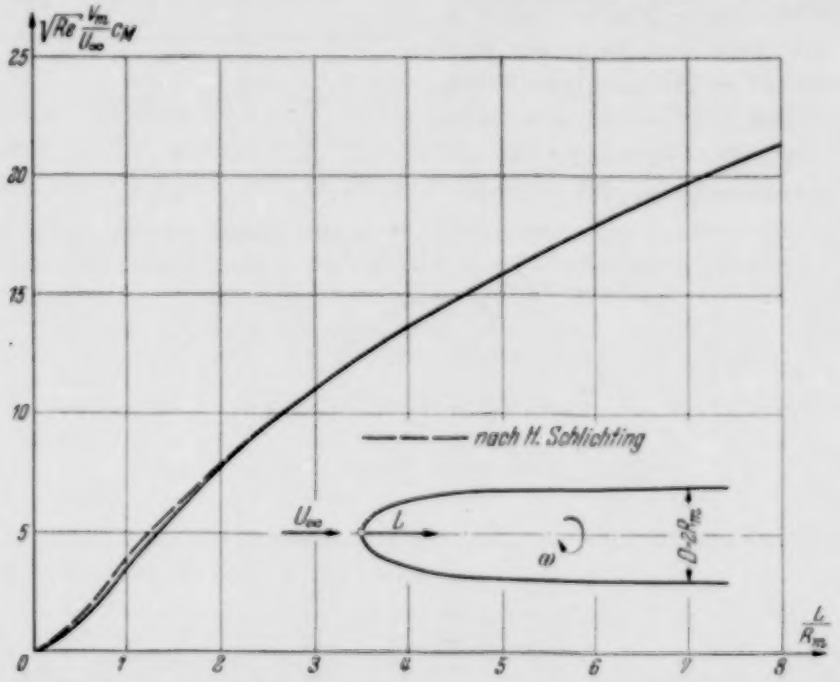

Abb. 9. Die Drehmomentenbeiwerte für den rotierenden Halbkörper bei *laminarer* Strömung;
$c_M = M/\frac{\varrho}{2} V_m^2 R_m^3$; $Re = U_\infty R_m/\nu$; $V_m = \omega R_m$.

[1] Der Fall $k = 1$ (rotierende Kugel) wurde bereits als zweites Beispiel behandelt. Die Unterschiede in den Zahlenwerten für die Drehmomentenbeiwerte (laminar 6,91 bzw. 9,76; turbulent 0,165 bzw. 0,299) rühren her von den verschiedenen Bezugsgrößen, Gl. (50) bzw. Gl. (57), und der verschiedenen Definition der *Reynolds*schen Zahlen.

[2] Es bedeutet $F\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \int_0^{\varphi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\vartheta}}$ und $E\left(\frac{\varphi}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \int_0^{\varphi/2} \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\vartheta}\, d\vartheta$.

nach (37) mit $x_1 = 0$, $K_1^* = 0$, $l = R_m$ und $x_2 = L$ berechnet. Die Abb. 9 und 10 zeigen die graphischen Darstellungen.

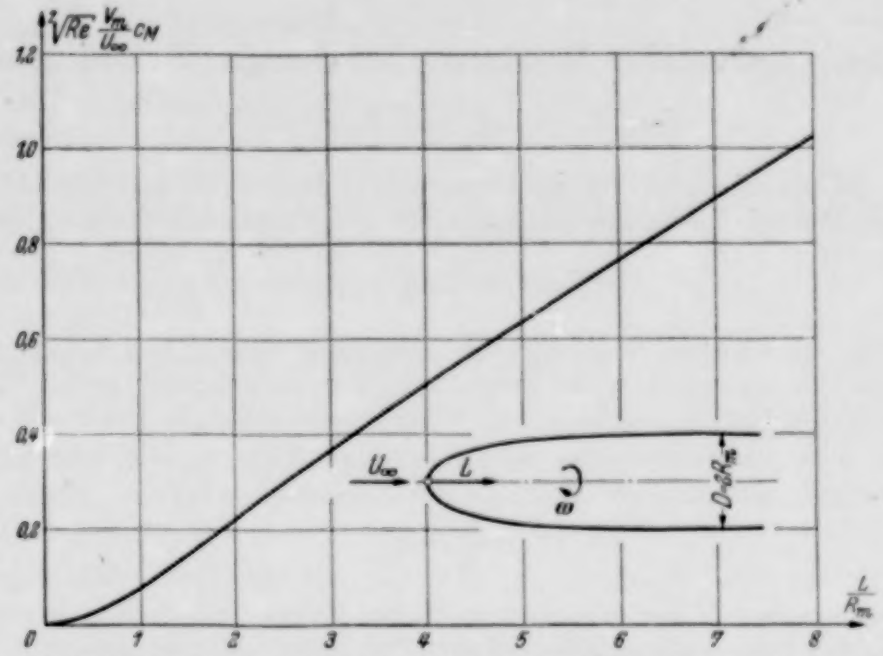

Abb. 10. Die Drehmomentenbeiwerte für den rotierenden Halbkörper bei *turbulenter* Strömung; $c_M = M/\frac{\varrho}{2}\, V_m^2\, R_m^3$; $Re = U_\infty\, R_m/\nu$; $V_m = \omega R_m$.

Dabei gelten die folgenden Beziehungen:

$$c_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2}\, V_m^2\, R_m^3}\,; \qquad Re = \frac{U_\infty\, R_m}{\nu}\,, \qquad V_m = \omega\, R_m\,.$$

8. Zusammenfassung. Als Abschluß eines umfangreichen Programmes zur Berechnung der Strömung an angeblasenen rotierenden Rotationskörpern wird der bisher noch fehlende Fall turbulenter Strömung behandelt.

Für die Berechnung der Impulsverlustdicken sowie des Drehmomentes konnten einfache Quadraturformeln erhalten werden, die für den laminaren Fall ebenfalls eine recht brauchbare Näherung darstellen. In den Formeln kommen nur die Verteilung des Körperhalbmessers und die Geschwindigkeitsverteilung um den Körper vor. Es wird eine Abschätzung zur Bestimmung der Lage des Ablösungspunktes infolge der Drehbewegung des Körpers angegeben.

Tabelle 4. *Die geometrischen Daten und die Geschwindigkeitsverteilung des rotationssymmetrischen Halbkörpers.*

φ	$\frac{x}{R_m}$	$\frac{L}{R_m}$	$\frac{R}{R_m}$	$\frac{U}{U_\infty}$
0°	0	0	0	0
10°	0,087	0,006	0,087	0,174
20°	0,176	0,023	0,174	0,343
30°	0,266	0,052	0,259	0,504
40°	0,358	0,092	0,342	0,653
50°	0,455	0,145	0,423	0,787
60°	0,557	0,211	0,500	0,901
70°	0,665	0,291	0,574	0,996
80°	0,783	0,387	0,643	1,068
90°	0,914	0,500	0,707	1,118
100°	1,061	0,635	0,766	1,146
110°	1,233	0,798	0,819	1,155
120°	1,440	1,000	0,866	1,146
130°	1,703	1,260	0,906	1,123
140°	2,065	1,620	0,940	1,092
150°	2,618	2,173	0,966	1,059
160°	3,651	3,206	0,985	1,028
170°	6,595	6,149	0,996	1,007
180°	∞	∞	1,000	1,000

Das Verfahren wurde erprobt an den Beispielen der rotierenden Scheibe, der Kugel, der Rotationsellipsoide und des räumlichen Halbkörpers. In allen Fällen wurde der Momentenbeiwert bei laminarer und turbulenter Strömung berechnet. Allgemein kann man zeigen, daß sich das Drehmoment bei konstant gehaltener Anströmungsgeschwindigkeit linear mit der Umfangsgeschwindigkeit ändert.

(Eingegangen am 23. Mai 1953.)

Anschrift des Verfassers: Priv.-Doz. Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, Braunschweig, Körnerstraße 12.

Zur Erzielung optimaler Wirkung bei Pendel-Schwingungstilgern.

Von **A. Slibar** und **K. Desoyer.**

1. Einleitung. Bekanntlich liefert die linearisierte Behandlung [1]) des an einer rotierenden Masse angelenkten Pendel-Schwingungstilgers die als Abstimmbedingung bekannte Relation

$$\Omega^2 = \frac{L}{l}\,\omega_0^2, \tag{1}$$

welche zur Erzielung günstigster Tilgerwirkung einzuhalten ist. Darin bedeuten Ω die Kreisfrequenz der erregenden Momente, L die Entfernung des Anlenkpunktes des Pendels vom Drehpunkt der rotierenden Masse, ω_0 die mittlere Winkelgeschwindigkeit der umlaufenden Massen, l die Länge des als mathematisches Pendel aufgefaßten Tilgers. Die Gleichung (1) nimmt die einfache Form

$$\frac{L}{l} = \nu^2 \tag{1'}$$

an, wenn die Kreisfrequenz Ω der erregenden Momente als ein ν-faches der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_0 der rotierenden Masse eingeführt wird. Die linearisierte Rechnung liefert keine Beziehungen zur Bestimmung von optimalen Werten für die Pendelmasse, sondern die Aussage, diese möglichst groß zu machen.

In einer vorangegangenen Arbeit [2] konnten die Verfasser zeigen, daß sich bei nichtlinearisierter Behandlung des Tilgers als mathematisches Pendel eine Bestimmungsgleichung für die optimale Pendelmasse auffinden läßt. Die Rechnung lieferte neben der Abstimmbedingung (1') als Bestimmungsgleichung für optimale Tilgungsverhältnisse die Beziehung

$$\left(\frac{m\,L^2}{J}\right)_{\text{opt.}} = \frac{3\,\nu^4}{2(\nu^2+1)^2}. \tag{2}$$

Darin bedeuten m die Masse des Pendels, J das Trägheitsmoment der rotierenden Masse, an die das Pendel angelenkt ist, L und l haben die bereits oben angegebene Bedeutung. Die Rechnung ergab weiters, daß bei gewähltem L und J die doppelten Werte der aus (2) folgenden optimalen Massen zu unerwünschten Resonanzzuständen führen.

Ist der Anlenkpunkt des Tilgers aus konstruktiven Gründen festgelegt, so sind zur Erzielung günstigster Tilgungswirkung des Pendels, wenn dieses als mathematisches aufgefaßt wird, nur die zwei Größen l und m frei verfügbar. Legt man der Betrachtung jedoch ein physikalisches Pendel zugrunde, so ist der Tilger durch Festlegung von drei voneinander unabhängigen Größen, nämlich der Masse m, des Abstandes s des Pendelschwerpunktes vom Anlenkpunkt und des Trägheitshalbmessers i_s des Pendels um seinen Schwerpunkt, zu bestimmen. Die Betrachtung von ausgeführten Tilgerformen [3] zeigt, daß die rechnerische Behandlung von Tilgern als mathematische Pendel (mit Ausnahme eines Sonderfalles, vgl. Abschnitt 5 dieser Arbeit) in den meisten Fällen nur als eine grobe Näherung für das tatsächliche Verhalten des angelenkten Pendelkörpers angesehen werden kann. Zweifellos führt aber gerade die Möglichkeit, drei voneinander unabhängige Parameter (m, s, i_s) möglichst günstig zu kombinieren, zu einer wesentlich größeren Freizügigkeit in der Konstruktion. Aus diesem Grunde soll im folgenden der als physikalisches Pendel aufgefaßte Tilger, auch unter Einbeziehung größerer Ausschlagwinkel, behandelt werden.

Die vorliegende Berechnung der Tilgungswirkung eines Pendels an einer einzigen Drehmasse ist vornehmlich für Sternmotoren anwendbar. Die Einwirkung von mehreren physika-

---

[1] *O. Kraemer*, Z. VDI **82** (1938), S. 1297, Z. VDI **83** (1939), S. 901, Motortechn. Z. **1** (1939), S. 3. *W. Schick*, Ing.-Arch. **10** (1939), S. 303. *A. Kimmel* u. *I. Lutzweiler*, Ing.-Arch. **12** (1941), S. 100. *R. Lambrich*, Das Fliehkraftresonanzpendel, Jb. dtsch. Luftfahrtforsch. 1940, S. 1170. *H. Kammerer*, Die Eigenfrequenzkurven bei Drehschwingungssystemen mit Fliehkraftpendeln, Jb. dtsch. Luftfahrtf. 1940, S. 1180.

[2] *K. Desoyer* u. *A. Slibar*, Ing.-Arch. **22** (1953), S. 208.

[3] z. B. *H. Schrön*, Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine. Wien, 1947.

lischen Pendeln auf eine einfach oder mehrfach zusammenhängende elastische Kette [1] soll in einer nachfolgenden Arbeit untersucht werden.

2. Die Bewegungsgleichungen. Der Rechnung liegt eine Anordnung gemäß Abb. 1 zugrunde.

An einer Schwungmasse vom Trägheitsmoment J sei im Abstand L von der Drehachse ein physikalisches Pendel der Masse m angelenkt. Der Abstand zwischen dessen Schwerpunkt S und dem Anlenkpunkt A sei s. Der Trägheitshalbmesser des Pendelkörpers bezüglich seines Schwerpunktes sei i_s. Die Bedeutung der weiteren Bezeichnungen geht aus Abb. 1 hervor.

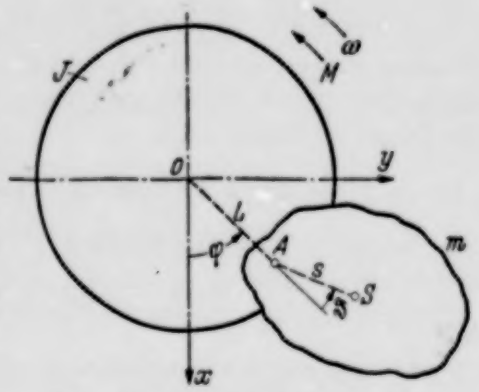

Abb. 1. Schema eines einfach angelenkten Pendel-Schwingungstilgers.

Auf die Schwungmasse wirke ein äußeres Drehmoment

$$M = M_0 + \Delta M \sin \nu \varphi, \tag{3}$$

von dem der konstante Betrag M_0 zur Aufrechterhaltung der konstanten mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Anordnung gegen die Arbeitswiderstände abgespaltet werde.

In die *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \tag{4}$$

führen wir als verallgemeinerte Koordinaten die beiden Winkel

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \vartheta$$

ein, die die Lage des Systems in jedem Augenblick kennzeichnen. Setzt man zur Bestimmung der verallgemeinerten Kräfte Q_k die Gleichheit der differentiellen Arbeiten

$$Q_\varphi \, d\varphi + Q_\vartheta \, d\vartheta = \Delta M \sin \nu \varphi \cdot d\varphi \tag{5}$$

an, so ergibt sich

$$Q_\varphi = \Delta M \sin \nu \varphi, \quad Q_\vartheta = 0. \tag{5'}$$

Die kinetische Energie T des gesamten Systems ist

$$T = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2} v_S^2 + \frac{m i_S^2}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2. \tag{6}$$

Aus den Koordinaten x_S und y_S des Pendelschwerpunktes in dem nicht mitrotierenden Koordinatensystem der Abb. 1

$$\left.\begin{aligned} x_S &= L \cos \varphi + s \cos (\varphi + \vartheta), \\ y_S &= L \sin \varphi + s \sin (\varphi + \vartheta), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

erhält man das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit v_S des Pendelschwerpunktes:

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = [L^2 + s^2 + 2 L s \cos \vartheta] \dot{\varphi}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2 + 2 s^2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} + 2 L s \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta. \tag{8}$$

Die kinetische Energie T des gesamten Systems wird damit

$$T = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2}[L^2 + s^2 + 2 L s \cos \vartheta]\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} s^2 \dot{\vartheta}^2 + m s^2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} + m L s \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \frac{m i_S^2}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2. \tag{6'}$$

Durch Einsetzen von T und dessen Ableitungen sowie von Q_φ bzw. $Q_\vartheta = 0$ in (4) erhält man die beiden Bewegungsgleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} &(J + mL^2 + 2m L s \cos \vartheta) \ddot{\varphi} + m (s^2 + i_S^2) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta}) - 2m L s \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \\ &\qquad - m L s \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta + m L s \ddot{\vartheta} \cos \vartheta = \Delta M \sin \nu \varphi, \\ &(s^2 + i_S^2) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta}) + Ls (\ddot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

[1] R. *Grammel*, *K. Klotter* und *K. v. Sanden*, Ing.-Arch. **7** (1936), S. 439.
W. Schick, Ing.-Arch. **10** (1939), S. 303.
A. Kimmel und *I. Lutzweiler*, Ing.-Arch. **12** (1941), S. 100.

3. Auswertung der Bewegungsgleichungen. Zerlegt man die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ in den konstanten Anteil ω_0 und die Störung $\Delta\omega$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

dann ist wegen $\dot{\omega}_0 = 0$ die Größe $\dot{\omega}$ durch $\Delta\dot{\omega}$ zu ersetzen. Führt man die obige Zerlegung in die Gleichungen (9) ein und vernachlässigt wie üblich $\Delta\omega$ gegen ω_0, so nimmt das System (9) die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} &(J + m L^2 + 2 m L s \cos\vartheta)\,\Delta\dot{\omega} + m\,(i_S^2 + s^2)\,(\Delta\dot{\omega} + \ddot{\vartheta}) - 2 m L s \omega_0 \dot{\vartheta} \sin\vartheta - \\ &\quad - m L s \dot{\vartheta}^2 \sin\vartheta + m L s \ddot{\vartheta} \cos\vartheta = \Delta M \sin \nu \omega_0 t, \\ &\frac{s^2 + i_S^2}{L s}\,(\Delta\dot{\omega} + \ddot{\vartheta}) + \Delta\dot{\omega} \cos\vartheta + \omega_0^2 \sin\vartheta = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Führt man die dimensionslosen Größen

$$\frac{s^2 + i_S^2}{L s} = \lambda^*, \quad \frac{s}{L} = \sigma, \quad \frac{m L^2}{J} = \Theta, \quad \frac{\Delta M}{J \omega_0^2} = K, \quad \omega_0 t = \tau \tag{10}$$

ein und kennzeichnet man die Ableitungen nach τ durch einen Strich, so erhält man aus (9')

$$\left.\begin{aligned} &(1 + \Theta + \Theta\sigma\lambda^* + 2\Theta\sigma\cos\vartheta)\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} - 2\Theta\sigma\vartheta' \sin\vartheta - \Theta\sigma\vartheta'^2 \sin\vartheta \\ &\quad + \Theta\sigma(\lambda^* + \cos\vartheta)\,\vartheta'' = K \sin \nu\tau, \\ &\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} = -\frac{\lambda^*\vartheta'' + \sin\vartheta}{\lambda^* + \cos\vartheta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Berücksichtigt man, daß ϑ, im Bogenmaß gemessen, praktisch stets kleiner als 1 bleibt und verwendet man demgemäß die Entwicklungen

$$\sin\vartheta \approx \vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}, \quad \cos\vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}, \quad \frac{1}{\lambda^* + \cos\vartheta} \approx \frac{1}{1+\lambda^*}\left(1 + \frac{1}{1+\lambda^*}\,\frac{\vartheta^2}{2}\right)$$

unter Streichung der Glieder höherer als dritter Ordnung in ϑ bzw. der Produkte von ϑ und dessen Ableitungen, so geht die zweite Gleichung (11) in die Form über

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} = c_1^*\vartheta'' + c_2^*\vartheta + c_3^*\vartheta^3 + c_4^*\vartheta''\vartheta^2, \tag{12}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$-\frac{\lambda^*}{1+\lambda^*} = c_1^*, \quad -\frac{1}{1+\lambda^*} = c_2^*, \quad -\frac{2-\lambda^*}{6(1+\lambda^*)^2} = c_3^*, \quad -\frac{\lambda^*}{2(1+\lambda^*)^2} = c_4^*. \tag{12a}$$

Die erste Gleichung (11) geht bei gleicher Entwicklung und Verwendung von (12) über in

$$a_1^*\vartheta'' + a_2^*\vartheta + a_3^*\vartheta^3 + a_4^*\vartheta''\vartheta^2 + a_5^*\vartheta'^2\vartheta + a_6^*\vartheta'\vartheta = K \sin \nu\tau \tag{13}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} a_1^* &= [1 + \Theta + \Theta\sigma(2+\lambda^*)]\,c_1^* + \Theta\sigma(1+\lambda^*), & a_4^* &= [1 + \Theta + \Theta\sigma(2+\lambda^*)]\,c_4^* - \Theta\sigma\left(c_1^* + \frac{1}{2}\right) \\ a_2^* &= [1 + \Theta + \Theta\sigma(2+\lambda^*)]\,c_2^*, & a_5^* &= -\Theta\sigma, \\ a_3^* &= [1 + \Theta + \Theta\sigma(2+\lambda^*)]\,c_3^* - \Theta\sigma\,c_2^*, & a_6^* &= -2\Theta\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

Die Gleichungen (12) und (13) sind formal gleich wie die für das mathematische Pendel gültigen Gleichungen (12) und (13) der oben angeführten Arbeit[1], nur die Bedeutung der Koeffizienten ist eine andere. Man überzeugt sich leicht, daß die Koeffizienten c_1^* bis c_4^* bzw. a_1^* bis a_6^* in die entsprechenden Größen c_1 bis c_4 bzw. a_1 bis a_6 der dortigen Beziehungen übergehen, wenn man auf die ursprünglichen Bedeutungen der eingeführten Abkürzungen zurückgeht, die Länge s durch l ersetzt und weiters den Trägheitsradius i_S gleich Null setzt.

Wegen der formalen Übereinstimmung der Gleichungen (12) und (13) mit den gleich bezifferten Beziehungen des mathematischen Pendels kann die weitere Behandlung dieser beiden nichtlinearen Differentialgleichungen vollkommen analog durchgeführt werden. Der Ausdruck für die bezogene Winkelgeschwindigkeitsschwankung der Schwungmasse ergibt sich also ge-

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 36.

mäß Gleichung (19) der angeführten Arbeit, wenn man darin die Größen c_1 bis c_4 bzw. a_1 bis a_6 durch die entsprechenden mit Stern versehenen Größen ersetzt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = &-\frac{1}{\nu}\left\{\frac{c_2^* - \nu^2 c_1^*}{a_2^* - \nu^2 a_1^*} K - (c_2^* - \nu^2 c_1^*)\frac{[3(a_3^* - \nu^2 a_4^*) + \nu^2 a_5^*]}{4(a_2^* - \nu^2 a_1^*)} K^3 + \frac{3(c_3^* - \nu^2 c_4^*)}{4(a_2^* - \nu^2 a_1^*)^3} K^3\right\}\cos\nu\tau + \\ &+ \frac{[c_3^* - (2\nu)^2 c_1^*]\, a_6^*}{4[a_2^* - (2\nu)^2 a_1^*](a_2^* - \nu^2 a_1^*)^2} K^2 \cos 2\nu\tau - \\ &- \frac{1}{3\nu}\left\{\frac{[c_2^* - (3\nu)^2 c_1^*]\,[a_3^* - \nu^2(a_4^* + a_5^*)]}{4[a_2^* - (3\nu)^2 a_1^*](a_2^* - \nu^2 a_1^*)^3} - \frac{(c_3^* - \nu^2 c_4^*)}{4(a_2^* - \nu^2 a_1^*)^3}\right\} K^3 \cos 3\nu\tau + \cdots .\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Da der Parameter K die gleiche Bedeutung wie in der oben angegebenen Arbeit hat, gelten für dessen Größenabschätzung die gleichen Gesichtspunkte. K ergibt sich an Hand von ausgeführten Sternmotoren in der Größenordnung von 10^{-5} bis 10^{-3} je nach Tangentialdruckdiagramm, Kurbelwellenbauart und Drehzahl der Maschine.

Die Gleichung (14) zeigt, daß sich das Glied erster Ordnung in K zu Null machen läßt. Setzt man für c_1^*, c_2^*, a_1^*, und a_2^* gemäß (12a) und (13a) ein, so ergibt sich nämlich

$$\frac{c_2^* - \nu^2 c_1^*}{a_2^* - \nu^2 a_1^*} = \frac{1 - \nu^2\lambda^*}{[1 + \Theta + \Theta\sigma(2 + \lambda^*)](1 - \nu^2\lambda^*) + \nu^2\Theta\sigma(1 + \lambda^*)^2}. \quad (15)$$

Da der Nenner der rechten Seite von (15) nicht unendlich werden kann, muß für Verschwinden dieses Ausdrucks der Zähler zu Null gemacht werden. Die erste Abstimmbedingung für den als physikalisches Pendel gerechneten Tilger lautet somit

$$1 - \nu^2\lambda^* = 0 \quad (16)$$

bzw. mit der Bedeutung von λ^* gemäß (10)

$$\frac{s^2 + i_S^2}{L\,s} = \frac{1}{\nu^2}. \quad (16')$$

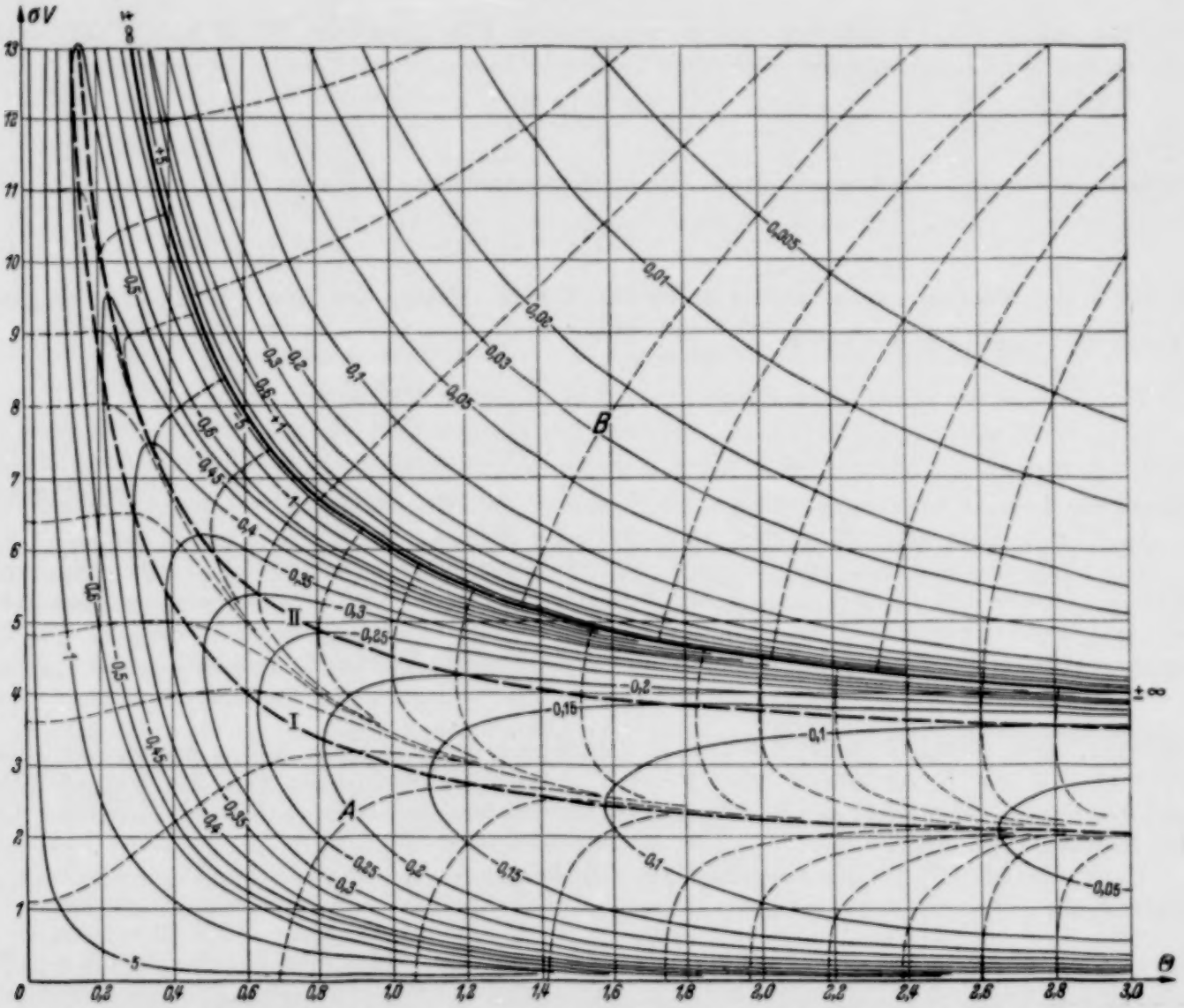

Abb. 2. Schichtenliniendiagramm für die Amplitude der verbleibenden bezogenen Winkelgeschwindigkeitsschwankung.

Nach Erfüllung dieser ersten Abstimmbedingung bleibt für die bezogene Winkelgeschwindigkeitsschwankung der Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\nu}{8\,\Theta^3\sigma^3(\nu^2+1)^4}K^3\cos\nu\tau - \frac{3}{2\,\Theta\sigma(\nu^2+1)^2\left[3(1+\Theta)-\Theta\sigma\dfrac{4\nu^4+2\nu^2+1}{\nu^2}\right]}K^2\cos 2\nu\tau - \\ - \frac{[1+(3\nu)^2]}{8\,\nu(\nu^2+1)^3\,\Theta^2\sigma^2\left[\dfrac{\Theta\sigma}{\nu^2}(9\nu^4+2\nu^2+1)-8(1+\Theta)\right]}K^3\cos 3\nu\tau + \cdots .\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Das ausschlaggebende Glied in (17) stellt der mit K^2 multiplizierte Term dar. Es ist also danach zu streben, den Absolutbetrag von

$$\Gamma \equiv -\frac{3}{2\,\Theta\sigma(\nu^2+1)^2\left[3(1+\Theta)-\Theta\sigma\dfrac{4\nu^4+2\nu^2+1}{\nu^2}\right]} \quad (18)$$

möglichst klein zu halten. Dies ist durch entsprechende Wahl der Parameter $\Theta = mL^2/J$ und $\sigma = s/L$ innerhalb der konstruktiven Schranken dieser beiden Größen zu erreichen.

Um zu einer für alle Werte von ν verwendbaren graphischen Darstellung der Größe Γ als Funktion der beiden Parameter Θ und σ zu gelangen, formen wir unter Verwendung der Abkürzung

$$V \equiv \frac{4\nu^4+2\nu^2+1}{\nu^2} \quad (18')$$

den Ausdruck (18) um in

$$\frac{(\nu^2+1)^2}{V}\Gamma \equiv -\frac{3}{2\,\Theta(\sigma V)[3(1+\Theta)-\Theta(\sigma V)]}. \quad (18a)$$

Die Beziehung (18a) wurde im Schichtendiagramm Abb. 2 und im Relief Abb. 3 dargestellt. Die an den Schichtenlinien eingetragenen Zahlen bedeuten jeweils den Wert der Größe

$$\frac{(\nu^2+1)^2}{V}\Gamma.$$

Sieht man von den Gliedern mit dritter und höherer Ordnung in K in (17) ab, so bleibt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \Gamma K^2\cos 2\nu\omega_0 t. \quad (19)$$

Unter dieser Voraussetzung stellen die an den Schichtenlinien der Abb. 2 und 3 eingetragenen Werte die Amplitude der Größe $\frac{(\nu^2+1)^2}{VK^2}\cdot\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ dar.

Der Schnitt des räumlichen Diagrammes Abb. 3 mit den Ebenen

$$\sigma = \frac{1}{\nu^2} = \text{konst.}$$

liefert die bereits bekannten ebenen Diagramme [1] für die Abhängigkeit der Amplitude von $\Delta\omega/\omega_0 K^2$ vom Parameter Θ für das mathematische Pendel.

Die Diagramme Abb. 2 und 3 zeigen, daß absolute Minima im Endlichen nicht existieren. Zu beachten ist, daß die Ordinaten in den Schaubildern unter der Voraussetzung der Einhaltung der ersten Abstimmbedingung (16) des physikalischen Pendels errechnet wurden. Die Beziehung (18a) zeigt, daß ein als Resonanz anzusprechender Effekt für den Fall

$$F(\Theta,\sigma) \equiv \Theta\sigma[3(1+\Theta)-\Theta\sigma V] = 0 \quad (20)$$

existiert. Das Gebiet $F(\Theta,\sigma) > 0$ ist im Schichtenliniendiagramm Abb. 2 mit A, das Gebiet $F(\Theta,\sigma) < 0$ mit B bezeichnet. Der Bereich A wird eingeschlossen von der $\Theta-$, σV-Achse und der Resonanzlinie mit der Bezifferung $\pm\infty$, während der Bereich B auf der anderen Seite der Resonanzlinie liegt.

Geht man in (20) auf die ursprünglichen Bedeutungen der Parameter Θ und σ zurück, so erhält man

$$F(m, L, s) \equiv \frac{mLs}{J^2}[3(J+mL^2)-mLsV]. \quad (21)$$

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 36.

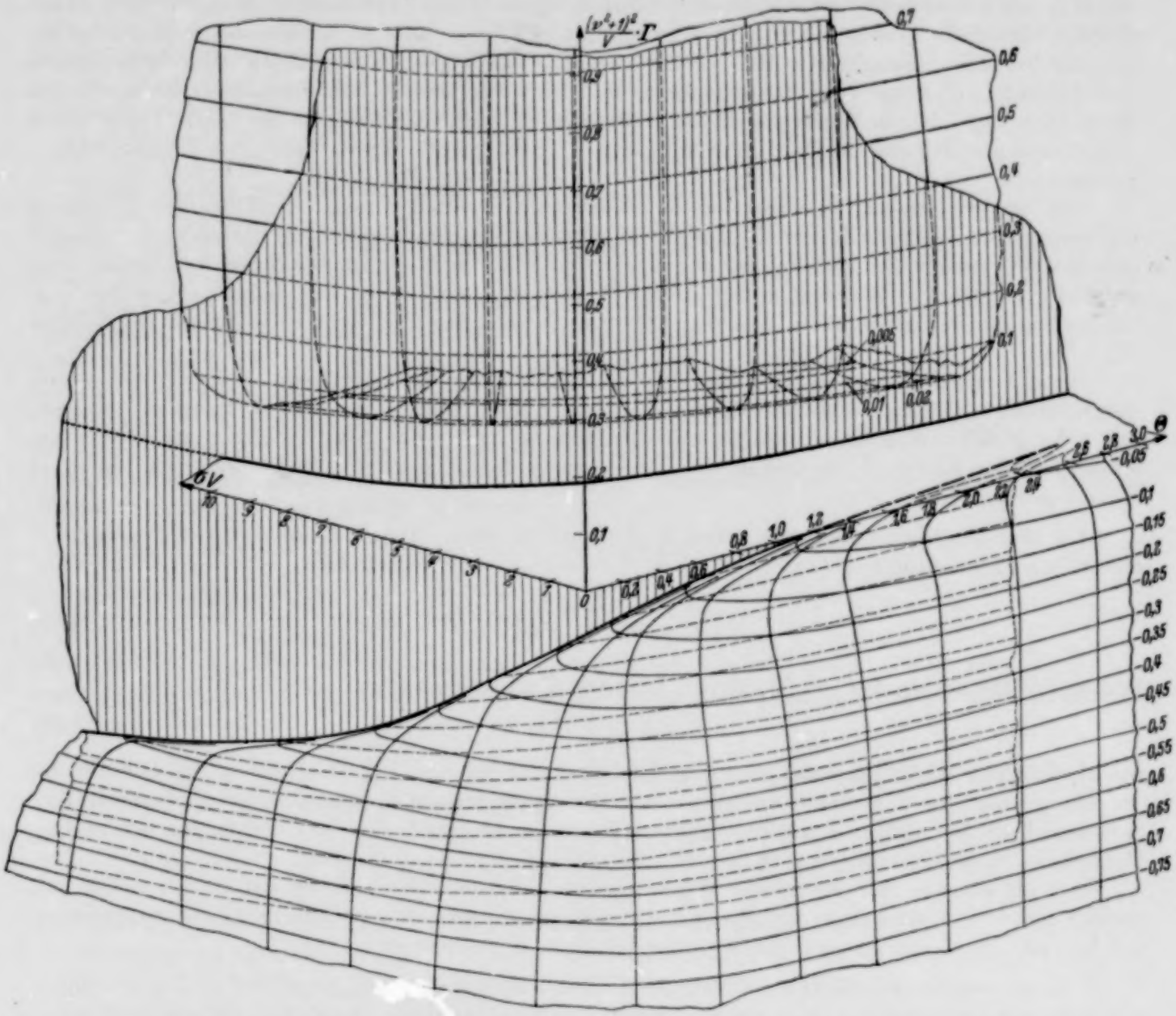

Abb. 3. Relief für die Amplitude der verbleibenden bezogenen Winkelgeschwindigkeitsschwankung.

Die partiellen Ableitungen von F nach m, L und s liefern, gleich Null gesetzt, die im Schichtenliniendiagramm strichliert eingezeichneten Kurven, auf deren Bedeutung im folgenden eingegangen wird.

4. Zur Berechnung und Konstruktion. Je nach den konstruktiven Forderungen werden verschiedene Wege bei der Durchrechnung eines Tilgers zu beschreiten sein. In den meisten Fällen werden die Größen J, ΔM und ω_0 als vorgegeben vorauszusetzen sein. Zulässig ist die freie Wahl von dreien der folgenden fünf Größen: $(\Delta\omega)$ zulässig, m, s, L und i_S. Über die zu tilgende Ordnung ν muß — nach ausgeführter Schwingungsrechnung für die tilgerlose Anordnung — ein Entscheid getroffen werden.

Je nach Auswahl der drei wählbaren Größen sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:

a) Sei z. B. die Pendelmasse m und der zulässige Höchstwert $(\Delta\omega)_{zul}$ der Schwankung gegeben. Dann ist vorerst die Größe

$$\Gamma = \text{Amplitude von } \frac{\Delta\omega}{\omega_0 K^2}$$

zu bestimmen. Entsprechend der zu tilgenden Ordnung ν sind die zugehörigen Schichtenlinien im Diagramm Abb. 2 aufzusuchen.

Jeder einzelne Punkt der beiden, dem gegebenen Wert von $(\Delta\omega)_{zul}$ entsprechenden Schichtenlinien liefert zum angenommenen Wert von m eine mögliche Kombination von s und L. Im allgemeinen wird sich die Bestimmung von s und L aus einem Punkt der Schichtenlinie im Be-

reich B aus konstruktiven Gründen nicht durchführen lassen; zur Konstruktion werden daher die Schichtenlinien im Bereich A zu verwenden sein. Nun kann noch entweder σ oder L selbst gewählt werden. Im ersteren Fall bestimmen sich auf der dem gewählten σ entsprechenden Parallelen zur Θ-Achse zwei Schnittpunkte mit der betreffenden Schichtenlinie. Damit liegen die beiden zugehörigen Werte für Θ fest. Aus den Werten für Θ folgen die Werte für s und L und ferner aus der ersten Abstimmbedingung (16′) die zugehörigen Werte des Trägheitshalbmessers i_S.

Wird im zweiten Fall L selbst aus der Konstruktion entnommen, so ist bei gewähltem m ein bestimmter Wert für $\Theta = mL^2/J$ gegeben. Auf der entsprechenden Parallelen zur σV-Achse ergeben sich zwei Schnittpunkte mit der gewählten Schichtenlinie im Bereich A und damit zwei mögliche Werte $\sigma_{1,2}$. Mit den so erhaltenen Werten $\sigma_{1,2}$ bestimmen sich beim vorgewählten L die beiden Möglichkeiten für s. Die erste Abstimmbedingung (16′) liefert wieder das zugehörige $i_{S\,1,2}$.

Ist im zweiten der besprochenen Fälle an Stelle einer vorgeschriebenen höchstzulässigen Winkelgeschwindigkeitsschwankung die Forderung nach minimaler Schwankung zu erfüllen, so ist der gleiche Weg einzuschlagen und lediglich an Stelle der Schichtenlinie die strichliert eingezeichnete Kurve I aufzusuchen. Diese wurde durch partielle Differentiation von (21) nach s gewonnen.

b) Außer den vorgegebenen Größen J, ΔM und ω_0 seien $(\Delta\omega)_{zul}$, L und i_S gewählt; aus der ersten Abstimmbedingung (16′) folgen sofort zwei mögliche Werte für s:

$$s_{1,2} = \frac{L}{2\,\nu^2} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{2\,\nu^2}\right)^2 - i_S^2}\,. \tag{22}$$

Dies zeigt, daß bereits bei der Wahl von L und i_S die Ungleichung

$$L \geq 2\,\nu^2\,i_S \tag{23}$$

einzuhalten ist. Geht man mit den nun festliegenden Werten $\sigma_{1,2} = s_{1,2}/L$ in das Schichtenliniendiagramm zu den Schnittpunkten mit der durch das zugelassene $(\Delta\omega)_{zul}$ bestimmten Schichtenlinie, so ergeben sich die möglichen Werte für Θ, aus denen die zugehörigen optimalen Pendelmassen zu entnehmen sind.

Wird im obigen Fall minimale Winkelgeschwindigkeitsschwankung gefordert, so ist an Stelle einer bestimmten Schichtenlinie die strichliert eingezeichnete Kurve II zu verwenden, welche aus (21) durch partielle Differentiation nach m gewonnen wurde.

c) Außer den vorgegebenen Größen J, ΔM und ω_0 seien $(\Delta\omega)_{zul}$, m und s frei gewählt; man geht mit einer Fehlannahme für $\sigma = s/L$ in das Schichtenliniendiagramm ein und bestimmt mit den Schnittpunkten auf den dem vorgegebenen $(\Delta\omega)_{zul}$ entsprechenden Höhenlinien die zugehörigen Werte für Θ. Die sich daraus ergebenden L werden im allgemeinen der Beziehung $\sigma_{\text{Fehlannahme}} = s/L$ widersprechen. Es kann aber leicht ersehen werden, in welcher Richtung der Wert von σ abzuändern ist. Nach wenigen Schritten wird sich die richtige Größe für L ermitteln lassen. Eine zweite Möglichkeit der Bestimmung von L wäre die rechnerische Ermittlung aus (18), wenn man darin die Größen Θ und σ durch ihre ursprünglichen Bedeutungen ersetzt. Man erhält

$$\Gamma \equiv \frac{-3\,J^2}{2\,m\,L\,s(\nu^2+1)^2\left[3(J+m\,L^2) - m\,L\,s\,\dfrac{4\,\nu^4+2\,\nu^2+1}{\nu^2}\right]} = \text{Amplitude von } \frac{\Delta\omega}{\omega_0\,K^2}\,. \tag{18″}$$

Da diese Beziehung eine Gleichung dritten Grades in L darstellt, wird im allgemeinen der graphische Weg vorzuziehen sein.

Mit dem gefundenen Wert von L und dem gewählten s läßt sich aus der ersten Abstimmbedingung (16′) sofort i_S errechnen.

Ist bei festem m und s eine minimale Winkelgeschwindigkeitsschwankung gefordert, so ist lediglich an Stelle einer bestimmten Schichtenlinie die in den Schaubildern strichliert eingezeichnete Kurve II zu verwenden, die durch partielle Differentiation von (21) nach L gewonnen wurde.

d) Will man einen bereits in seinen Hauptabmessungen festgelegten Schwingungstilger, der die erste Abstimmbedingung (16′) erfüllt, auf seine Wirksamkeit überprüfen, so ist einfach mit den bekannten Werten von Θ und σ in das Schichtenliniendiagramm einzugehen.

c) Sind konstruktive Schranken für m, L und s vorgegeben, so bestimmen diese ein einzuhaltendes Gebiet im Diagramm Abb. 2. In diesem Gebiet ist der Punkt, welcher der kleinsten Winkelgeschwindigkeitsschwankung entspricht, aufzusuchen. Er liefert die zugehörigen Kombinationen von m, L und s. Aus der ersten Abstimmbedingung ist i_S zu errechnen.

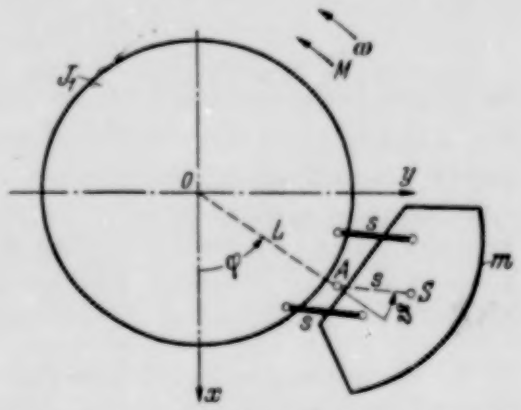

Abb. 4. Schema eines bifilar angelenkten Pendel Schwingungstilgers.

5. Der bifilar angelenkte Pendel-Tilger. Aus konstruktiven Gründen werden Pendel-Tilger häufig nach dem in Abb. 4 dargestellten Schema ausgeführt. Bei dieser Art der Anlenkung ist die Relativbewegung der Pendelmasse gegenüber der Hauptmasse eine reine Translation. Der Schwerpunkt S der Pendelmasse beschreibt gegenüber der rotierenden Hauptmasse eine Kreisbahn vom Halbmesser s um den Punkt A (Abb. 4). Der Abstand OA werde mit L, das Trägheitsmoment der Hauptmasse mit J_1 und der Trägheitshalbmesser des Pendelkörpers um seinen Schwerpunkt S mit i_{S_2} bezeichnet. Die Bedeutung der übrigen Bezeichnungen geht aus Abb. 4 hervor.

Die kinetische Energie T des gesamten Systems ist

$$T = (J_1 + m\, i_{S_2}^2)\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + m\,\frac{v_S^2}{2}. \tag{24}$$

Das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit v_S des Schwerpunktes des Pendelkörpers ergibt sich aus den Schwerpunktskoordinaten x_S und y_S in bezug auf das nicht mitrotierende Koordinatensystem der Abb. 4:

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = [L^2 + s^2 + 2\,L\,s\cos\vartheta]\,\dot{\varphi}^2 + s^2\,\dot{\vartheta}^2 + 2\,s^2\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} + 2\,L\,s\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta. \tag{25}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (24) erhält man

$$T = (J_1 + m\,i_{S_2}^2)\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2}[L^2 + s^2 + 2\,L\,s\cos\vartheta]\,\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\,s^2\,\dot{\vartheta}^2 + m\,s^2\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} + m\,L\,s\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta. \tag{24'}$$

Der Vergleich mit dem Ausdruck (6′) zeigt, daß der für das physikalische Pendel durchgeführte Rechnungsgang verwendbar ist, wenn man die dort eingeführte Größe J durch den Ausdruck $J_1 + m\,i_{S_2}^2$ und weiter den in der Beziehung (6′) verwendeten Trägheitshalbmesser i_S durch Null ersetzt.

Die erste Abstimmbedingung (16′) des physikalischen Pendels geht damit über in die erste Abstimmbedingung

$$\frac{s}{L} = \frac{1}{\nu^2} \tag{26}$$

des mathematischen Pendels. Der Ausdruck nach (18), der in Hinblick auf die verbleibende Winkelgeschwindigkeitsschwankung zum Minimum zu machen ist, geht dann über in

$$\bar{\Gamma} \equiv \frac{3\,\nu^6}{2(\nu^2+1)^2\,\Theta[(\nu^2+1)^2\,\Theta - 3\,\nu^4]} \tag{27}$$

mit

$$\Theta = \frac{m\,L^2}{J_1 + m\,i_{S_2}^2}. \tag{28}$$

Der Parameter K erhält die Bedeutung

$$\frac{\Delta M}{(J_1 + m\,i_{S_2}^2)\cdot\omega_0^2}. \tag{28'}$$

Abgesehen von der geänderten Bedeutung des Parameters Θ stimmt der Ausdruck $\bar{\Gamma}$ mit dem Koeffizienten des mit K^2 multiplizierten Termes der Gleichung (20) der bereits zitierten Arbeit der Verfasser [1] überein. Die Abhängigkeit der Größe $\bar{\Gamma}$ vom Parameter Θ kann demnach aus

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 36.

der Abb. 2 der angegebenen Arbeit entnommen werden. Die zweite Abstimmbedingung für bilifar angelenkte Tilger lautet analog (22) obiger Arbeit

$$\Theta_{\text{opt}} \equiv \frac{m_{\text{opt}} L^2}{J_1 + m_{\text{opt}} i_{S_2}^2} = \frac{3\nu^4}{2(\nu^2+1)^2}, \tag{29}$$

die durch Differentiation des Ausdruckes $\overline{I}'$ nach Θ erhalten wird. Eine genaue Untersuchung der Abhängigkeit der Größe $\overline{I}'$ von den beiden prinzipiell voneinander unabhängigen Parametern m und i_{S_2} hat hier keine praktische Bedeutung, da erstens der Parameter i_{S_2} für die Abstimmung nicht mit der gleichen Wirksamkeit eingeht wie bei einfach angelenkten physikalischen Pendeln und zweitens die im allgemeinen konstruktiv bedingte Form des Pendelkörpers bei der bifilaren Ausführung nicht wesentlich variiert werden kann und daher mit bestimmter Pendelmasse m der zugehörige Wert i_{S_2} im wesentlichen festgelegt ist.

6. Zusammenfassung. Die Betrachtung ausgeführter Konstruktionen von Pendel-Schwingungstilgern zeigt, daß die rechnerische Behandlung von einfach angelenkten Pendelkörpern als mathematische Pendel nur grobe Näherungen liefern kann. In der vorliegenden Arbeit wird die Einwirkung und zweckentsprechende Dimensionierung eines an einer rotierenden Masse angelenkten Tilgers, der als physikalisches Pendel behandelt wird, unter Einbeziehung großer Pendelausschläge untersucht.

Bei Zugrundelegung eines mathematischen Pendels stehen an Veränderlichen die Pendelmasse m, die Pendellänge l und die Entfernung L des Anlenkpunktes des Pendels vom Wellenmittel zur Verfügung. Geht man jedoch vom physikalischen Pendel aus, so tritt der Trägheitshalbmesser i_S des Pendelkörpers um seinen Schwerpunkt als weiterer Parameter hinzu. Die Möglichkeit, die vier voneinander unabhängigen Parameter m, L, s und i_S möglichst günstig zu kombinieren, gibt eine wesentlich größere Freizügigkeit in der Konstruktion, um geringste Winkelgeschwindigkeitsschwankung der rotierenden Hauptmasse zu erzielen. Es zeigt sich, daß die für das mathematische Pendel gültige erste Abstimmbedingung (1′) auch für große Ausschläge in die Bedingung (16′) übergeht. Die Amplitude der nach Erfüllung dieser Bedingung verbleibenden Winkelgeschwindigkeitsschwankung wird in einem Schichtenliniendiagramm in Abhängigkeit von zwei dimensionslosen Parametern dargestellt. Das beigefügte Relief (Abb. 3) zeigt, ebenso wie das Schichtenliniendiagramm Abb. 2, daß, wie bei der nichtlinearisierten Durchrechnung des mathematischen Pendels auch beim physikalischen Pendel trotz Einhaltung der ersten Abstimmbedingung bei ungünstiger Kombination der Parameter unerwünschte Resonanz auch im konstruktiv erreichbaren Bereich auftreten kann.

Anschließend werden die möglichen Wege zur praktischen Berechnung der Kenngrößen eines einfach angelenkten Pendel-Schwingungstilgers zusammengestellt.

Die abschließend durchgeführte Behandlung des bifilar angelenkten Pendel-Tilgers ergibt weitgehende Übereinstimmung mit den Ergebnissen der für das mathematische Pendel durchgeführten nichtlinearisierten Rechnung.

Die vorliegende Berechnung der Tilgungswirkung eines Pendels an einer rotierenden Hauptmasse ist vornehmlich für Sternmotore anwendbar, wobei der Übersichtlichkeit halber vorläufig vorausgesetzt wurde, daß die Drehmasse keine Eigenfrequenzen besitze. Eine analoge Untersuchung über die Wirkung und zweckentsprechende Dimensionierung mehrerer an ein schwingungsfähiges Gebilde angelenkter Pendel-Tilger soll später erfolgen.

(Eingegangen am 26. Mai 1953.)

Anschrift der Verfasser: Dozent Dr. *A. Slibar* und Dr. *K. Desoyer*, Wien IV., Karlspl. 13, Technische Hochschule.

Über den Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastischen Körper.

Von **D. Graffi.**

Man betrachtet einen elastischen Körper mit dem Volumen V und der Oberfläche σ. Nennen wir $\bar{F}\,dV$ und $\bar{R}\,d\sigma$ die Kräfte, die auf das Körperelement dV und auf das Oberflächenelement $d\sigma$ wirken, und $\bar{s}$ die zugehörige Verschiebung eines beliebigen Punktes P des Körpers. Ferner sei $\bar{s}'$ die Verschiebung von P wenn statt $\bar{F}\,dV$ und $\bar{R}\,d\sigma$ die Kräfte $\bar{F}'\,dV$ und $\bar{R}'\,d\sigma$ wirken. Die Kräfte und die Verschiebungen mögen im allgemein variabel mit der Zeit sein. Ist ϱ die Dichte in P, so hat man, wie Lord *Rayleigh* bemerkt hat[1], zu jeder Zeit die Beziehung

$$\int_V \left(\bar{F} - \varrho \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial t^2}\right)\bar{s}'\,dV + \int_\sigma \bar{R}\,\bar{s}'\,d\sigma = \int_V \left(\bar{F}' - \varrho \frac{\partial^2 \bar{s}'}{\partial t^2}\right)\bar{s}\,dV + \int_\sigma \bar{R}'\,\bar{s}\,d\sigma\,. \tag{1}$$

Die Gleichung (1) ist eine einfache Folgerung der Gleichungen der Dynamik der deformierbaren Körper und des *Hooke*schen Gesetzes, das im Fall der isotropen Körper, auf die wir uns beschränken, in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\Theta\,, \qquad \Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,, \tag{2}$$

wo δ_{ij} das *Kronecker*sche Symbol, σ_{ij} die Spannungen, ε_{ij} die Dehnungen, λ und μ die *Lamé*schen Konstanten sind.

Die Gleichung (1) enthält aber die im allgemeinen unbekannten Trägheitskräfte $\varrho\frac{\partial^2\bar{s}}{\partial t^2}$, $\varrho\frac{\partial^2\bar{s}'}{\partial t^2}$. Nur im statischen Fall verschwinden diese Kräfte und (1) reduziert sich auf den bekannten *Betti*schen Reziprozitätssatz[2]:

Unser Ziel ist nun, eine Gleichung zu erhalten, die analog zu (1) ist, in der aber keine Trägheitskräfte auftreten. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß, für $t = 0$ die Verschiebungen $\bar{s}$, $\bar{s}'$ und ihre ersten Ableitungen nach t verschwinden. Dann wenden wir auf die Gleichungen der deformierbaren Körper und auf das *Hooke*sche Gesetz (2) die *Laplace*-Transformation an, das heißt, wir multiplizieren jene Gleichungen mit e^{-pt} (p komplexe Zahl mit negativem Realteil) und integrieren über t von Null bis Unendlich. Wir setzen voraus, daß die so erhaltenen Integrale konvergieren, und daß bestimmte elementare Operationen erlaubt sind (wie Vertauschung der Ableitung nach den Raumkoordinaten mit der Integration nach t usw.), Voraussetzungen, die hier stets als gültig angesehen werden dürfen. Es ist alsdann leicht, zu erkennen, daß die Gleichungen (2) und die anderen Gleichungen formal gleich bleiben, wenn nur $\bar{s}$, $\bar{F}$ usw., durch ihre *Laplace*-Transformierten $\mathfrak{L}(\bar{s})$, $\mathfrak{L}(\bar{F})$ usw. ersetzt werden. Daraus folgt, daß auch (1) gilt, wenn wir die dortigen Größen durch ihre *Laplace*-Transformierten ersetzen. Erinnern wir uns daran, daß, unter unseren Voraussetzungen

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2\bar{s}}{\partial t^2}\right) = p^2\,\mathfrak{L}\,(\bar{s})$$

ist, so kommt

$$\left.\begin{aligned}\int_V \mathfrak{L}(\bar{F})\,\mathfrak{L}(\bar{s}')\,dV - p^2\int_V \varrho\,\mathfrak{L}(\bar{s})\,\mathfrak{L}(\bar{s}')\,dV + \int_\sigma \mathfrak{L}(\bar{R})\,\mathfrak{L}(\bar{s}')\,d\sigma \\ = \int_V \mathfrak{L}(\bar{F}')\,\mathfrak{L}(\bar{s})\,dV - p^2\int_V \varrho\,\mathfrak{L}(\bar{s}')\,\mathfrak{L}(\bar{s})\,dV + \int_\sigma \mathfrak{L}(\bar{R}')\,\mathfrak{L}(\bar{s})\,d\sigma\,.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wendet man jetzt den Faltungssatz an, so erhält man sofort

$$\left.\begin{aligned}\int_0^t d\tau \int_V \bar{F}(t-\tau)\,\bar{s}'(\tau)\,dV + \int_0^t d\tau \int_\sigma \bar{R}(t-\tau)\,\bar{s}'(\tau)\,d\sigma \\ = \int_0^t d\tau \int_V \bar{F}'(t-\tau)\,\bar{s}\,(\tau)\,dV + \int_0^t d\tau \int_\sigma \bar{R}'(t-\tau)\,\bar{s}\,(\tau)\,d\sigma\,.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Das ist der Reziprozitätssatz der Dynamik der elastischen Körper, in welchem, im Gegensatz zu Gleichung (1), keine Trägheitskräfte, sondern nur die gewöhnlichen Kräfte und die zugehörigen Verschiebungen erscheinen.

---

[1] *A. E. H. Love*, The mathematical theory of elasticity, Kap. VII Nr. 121, Cambridge 1934.
[2] *A. E. H. Love*, a. a. O.

Betrachten wir jetzt den speziellen Fall, in welchen die Kräfte als Produkt einer Ortsfunktion mit einer Zeitfunktion $G(t)$, die für alle Kräfte gleich ist, ausgedrückt werden können, nämlich

$$\bar{F}(t, P) = G(t)\,\bar{a}\,, \quad \bar{F}'(t, P) = G(t)\,\bar{a}'\,, \quad \bar{R}(t, P) = G(t)\,\bar{b}\,, \quad \bar{R}'(t, P) = G(t)\,\bar{b}'\,, \tag{5}$$

wo $\bar{a}$, $\bar{a}'$, $\bar{b}$, $\bar{b}'$ nur Ortsfunktionen sind. Dann wird aus (4)

$$\int_0^t G(t-\tau)\,d\tau\left[\int_V \bar{a}\,\bar{s}'(\tau)\,dV + \int_\sigma \bar{b}\,\bar{s}'(\tau)\,d\sigma\right] = \int_0^t G(t-\tau)\,d\tau\left[\int_V \bar{a}'\,\bar{s}(\tau)\,dV + \int_\sigma \bar{b}'\,\bar{s}(\tau)\,d\sigma\right]. \tag{6}$$

Da diese Gleichung zu jeder Zeit erfüllt sein muß, ist es leicht, zu beweisen, daß die Glieder, die in (6) mit $G(t-\tau)$ multipliziert sind, gleich sein müssen. Wenn wir diese Glieder mit $G(t)$ multiplizieren und auf (5) achten, so haben wir (zu jeder Zeit)

$$\int_V \bar{F}\,\bar{s}'\,dV + \int_\sigma \bar{R}\,\bar{s}'\,d\sigma = \int_V \bar{F}'\,\bar{s}\,dV + \int_\sigma \bar{R}'\,\bar{s}\,d\sigma\,. \tag{7}$$

Diese Beziehung ist vollkommen analog zum *Betti*schen Satz in der Statik der elastischen Körper, natürlich nur für die Ansätze (5) der Kräfte und mit verschwindenden Anfangsbedingungen.

An anderer Stelle habe ich die Ausdehnung der Gleichung (4) auf den Fall mit nicht verschwindenden Anfangsbedingungen gezeigt und andere Anwendungen angegeben [1].

Wir kehren jetzt zu (7) zurück und nehmen an, daß das erste Kräftesystem sich auf eine einzige, im Punkt A konzentrierte Kraft $\bar{H}(A)$, das zweite Kräftesystem auf eine einzige, im Punkt B konzentrierte Kraft $\bar{H}'(B)$ reduziert. Die Ansätze (5) sind bestimmt erfüllt, wenn beide Kräfte zu jeder Zeit den gleichen absoluten Betrag und eine von der Zeit unabhängige Angriffslinie haben (die auch verschieden für die zwei Kräfte sein kann) und gleichzeitig ihre Richtung ändern. Mit diesen Annahmen wird aus (7)

$$\bar{H}(A)\,\bar{s}'(A) = \bar{H}'(B)\,\bar{s}(B)\,, \tag{8}$$

wo $\bar{s}(B)$ und $\bar{s}'(A)$ die Verrückungen in B und A infolge der Kräfte $\bar{H}(A)$ und $\bar{H}'(B)$ sind. Die Beziehung (8), die einen bekannten *Maxwell*schen Satz auf die Dynamik der elastischen Körper erweitert, liefert die Komponente in der Richtung von $\bar{H}$ der Verschiebung, die in A infolge $\bar{H}'$ entsteht, sobald die Komponente von $\bar{s}(B)$ in der Richtung von $\bar{H}'(B)$ bekannt ist [2].

Endlich beweisen wir, daß die Gleichung (4) auch bei Reibungskräften noch gilt; genauer gesagt, wir nehmen an, daß in den Beziehungen zwischen den Spannungen und den Dehnungen Zähigkeitsglieder vorkommen, die proportional zur Ableitung der Dehnungen sind (Hypothese von *Voigt*), sowie Nachwirkungsglieder mit unveränderlicher Nachwirkung, die, gemäß der Theorie von *Boltzmann* und *Volterra*, die Erscheinungen der elastischen Hysteresis darstellen.

Wenn wir für $t \leq 0$ den Körper im natürlichen Zustand annehmen, so wird hiernach aus (3)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) = 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}(t) + \lambda\,\delta_{ij}\,\Theta(t) + 2\,\mu'\,\frac{\partial \varepsilon_{ij}(t)}{\partial t} + \lambda'\,\delta_{ij}\,\frac{\partial \Theta(t)}{\partial t}\\ + \int_0^t \varphi(t-\tau)\,\varepsilon_{ij}(\tau)\,d\tau + \delta_{ij}\int_0^t \psi(t-\tau)\,\Theta(\tau)\,d\tau\,,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo μ' und λ' neue Konstanten und $\varphi(t-\tau)$, $\psi(t-\tau)$ bekannte Funktionen von t und τ sind.

Wir wenden auf diese Gleichung die *Laplace*-Transformation an; nennen wir $g(p)$ und $h(p)$ die L-Transformierten von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, so haben wir

$$\mathfrak{L}(\sigma_{ij}) = [2\,\mu + 2\,\mu'\,p + g(p)]\,\mathfrak{L}(\varepsilon_{ij}) + \delta_{ij}[\lambda + \lambda'\,p + h(p)]\,\mathfrak{L}(\Theta)\,; \tag{10}$$

das heißt: die Beziehung zwischen den Transformierten der Spannungen und der Dehnungen ist, bis auf den Wert der Koeffizienten, gleich der Beziehung (2) zwischen den Spannungen und den Dehungen in einem elastischen idealen Körper. Man versteht also leicht, daß auch bei Gültigkeit der Gleichung (9) die Gleichung (3) und folglich die Gleichung (4) gültig bleiben, womit also die Gleichung (4), wie behauptet, auf den elastischen dissipativen Systemen erweitert ist.

(Eingegangen am 1. Juni 1953.)

Anschrift des Verfassers: Professor *D. Graffi*, Bologna, Istituto Matematico dell' Univers tà.

[1] *D. Graffi*, Ann. mat. pura appl. (4) 17 (1939) S. 173; Mem. Acc. Scienze Bologna (10) 4 (1946/47) S. 103.

[2] Diesen Satz hat schon Lord *Rayleigh*, Theory of Sound Nr. 108, ausgesprochen; er setzt aber voraus, daß beide Kräfte und die Verschiebungen harmonisch von der Zeit abhängen. Hier wird der Satz, mit einem anderen Verfahren, auf mit der Zeit beliebig variable Kräfte erweitert.

Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten.

Von **J. Krettner.**

1. Einleitung. Das Problem der schiefen oder parallelogrammförmigen Platte, das in der Baustatik, namentlich im Brückenbau eine gewisse Bedeutung hat, ist im wesentlichen erst nach dem Kriege, vor allem im Ausland oder von ausländischen Autoren [1] in Angriff genommen worden. Zwei Wege wurden vornehmlich eingeschlagen. Entweder legt man rechtwinklige Koordinaten, also auch die gewöhnliche Differentialgleichung für die Plattenbiegung zugrunde, um dann allerdings infolge der schiefen Randbedingungen eine wesentliche Erschwerung der Rechnung in Kauf zu nehmen, wie die Arbeiten von *Anzelius* [2] und *Rongved* [3] zeigen, wenn man nicht andere, z. B. elliptische Funktionen heranziehen will, welche in orthogonalen Koordinaten eine schiefe Periodizität aufweisen. Andererseits kann man nach dem Vorbild von *Lardy* und *Favre* von vornherein schiefwinklige, dem Problem angepaßte Koordinaten verwenden, wobei aber dann in der auf schiefwinklige Koordinaten umgerechneten Differentialgleichung gewisse Zusatzglieder auftreten, die natürlich auch wieder rechnerische Schwierigkeiten mit sich bringen. Hier soll der *Lardy-Favre*sche Weg gewählt werden, in Anknüpfung an meine allgemeinen Ausführungen über die Darstellung der Tensoren in allgemeinen Koordinaten [4]. Durch eine nicht ganz leichte Umformung der bei der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sich ergebenden Koeffizienten gelingt es — das dürfte zunächst das wesentliche Ergebnis der vorliegenden Arbeit sein — mit Hilfe der Übertragung der bei rechtwinkligen Platten verwendeten Methode [5], die auftretenden Doppelreihen für die Durchbiegung in einfache, gut konvergierende Reihen zu transformieren. In der vorliegenden Mitteilung soll zunächst der Fall der momentenfrei aufgelegten, schiefwinkligen, vollbelasteten Platte zugrunde gelegt werden.

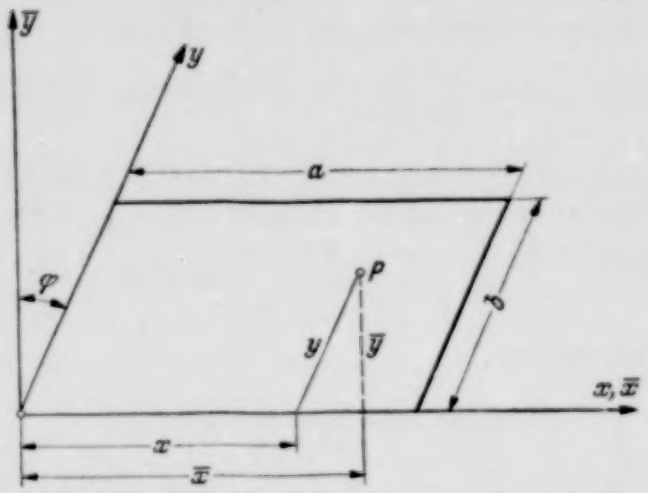

Abb. 1. Zusammenhang zwischen rechtwinkligem und schiefwinkligem System.

2. Die Differentialgleichung der Biegefläche. Bekanntlich lautet die Plattengleichung in rechtwinkligen Koordinaten, wenn B die Biegesteifigkeit der Platte bedeutet

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{B}. \tag{1}$$

Mittels der Transformationsgleichungen (Abb. 1)

$$x = \bar{x} - \bar{y}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,, \qquad y = \frac{1}{\cos\varphi}\,\bar{y} \tag{2}$$

ergibt sich

$$\Delta w = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\sin\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) \tag{3}$$

und

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{\cos^4\varphi}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(1 + 2\sin^2\varphi)\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} - 4\sin\varphi\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\,\partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^3}\right)\right]. \tag{4}$$

---

[1] *P. Lardy*, Schweiz. Bauztg. (1949) S. 207 u. 419; *H. Favre*, Schweiz. Bauztg. (1942) S. 35, 51, 60; *H. Favre*, Bulletin Techn. de la Suisse Romane (1946) S. 321; *J. Nielsen*, Beitrag zur Berechnung schiefw. Platten. Akademie der Techn. Wissenschaften.

[2] *A. Anzelius*, Bauing. 20 (1939) S. 478—482.

[3] *Rongveld*, Über das Problem schiefw. Platten, Diss. Berlin 1945.

[4] *J. Krettner*, Österr. Ing.-Arch. 7 (1953) S. 11; *J. Krettner*, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 112—118.

[5] *S. Iguchi*, Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platte. Berlin 1933; *W. Müller*, Ing.-Arch. 21 (1952) S. 278.

Setzt man $s_0 = \sin\varphi$ und $c_0 = \cos\varphi$, so erhält man aus (1) die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\,(1 + 2\,s_0^2)\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} - 4\,s_0\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\,\partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^3}\right) = \frac{c_0^4}{B}\,p\,(x, y)\,. \tag{5}$$

Man kann nun das Integral dieser Plattengleichung gemäß $w = w_0 + w_1$ aus dem Integral w_0 der vollständigen Gleichung $\Delta\Delta w = p/B$ und aus der Lösung w_1 der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ zusammensetzen. Das partikuläre Integral der inhomogenen Gleichung erfaßt dabei die einwirkende Oberflächenbelastung der Platte, während das allgemeine Integral der homogenen Gleichung den Randbedingungen des Problems angepaßt werden muß.

3. Partikuläres Integral der vollständigen Gleichung. Aus dem Verhalten der Platte ist ersichtlich, daß für die Funktion der Biegefläche stets $w_0\,(a - x, b - y) = w_0\,(x, y)$ sein muß. Gegenüber der Rechteckplatte, wo doppelte Symmetrie besteht, ist demnach ein erweiterter Ansatz notwendig, der in der Form

$$w_0(x, y) = \sum_m \sum_n \left(c_{m\,n} \cos\frac{m\,\pi}{a}\,x \cos\frac{n\,\pi}{b}\,y + d_{m\,n} \sin\frac{m\,\pi}{a}\,x \sin\frac{n\,\pi}{b}\,x\right) \quad (m, n = 1, 3, 5, \ldots) \tag{6}$$

angesetzt werden kann. Für den Druck, der wie im Falle der Rechteckplatte doppelte Symmetrie aufweist, ist für $m, n = 1, 3, 5, \ldots$ der Ansatz

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{m\,n} \sin\frac{m\,\pi}{a}\,x \sin\frac{n\,\pi}{b}\,y \tag{7}$$

zu wählen.

Verwendet man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \bar{a} &= \left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2 + 4\,s_0^2\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2, \\ \bar{b} &= 4\,s_0\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)\left(\frac{n\,\pi}{b}\right)\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right], \\ \bar{c} &= \frac{16\,p_0}{\pi^2}\,\frac{c_0^4}{B}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

so ergeben die Ansätze (6) und (7) durch Einsetzen in die Differentialgleichung (5) für die Koeffizienten $c_{m\,n}$ und $d_{m\,n}$ die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{a}\,c_{m\,n} + \bar{b}\,d_{m\,n} &= 0\,, \\ \bar{b}\,c_{m\,n} + \bar{a}\,d_{m\,n} &= \frac{c}{m\,n} \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\left.\begin{aligned} c_{m\,n} &= -\frac{\bar{c}}{m\,n}\,\frac{\bar{b}}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2} = -\frac{\bar{c}}{m\,n}\,\frac{4\,s_0\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)\left(\frac{n\,\pi}{b}\right)\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]}{\left\{\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2 - 4\,s_0^2\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right\}^2}, \\ d_{m\,n} &= +\frac{\bar{c}}{m\,n}\,\frac{\bar{a}}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2} = +\frac{\bar{c}}{m\,n}\,\frac{\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2 + 4\,s_0^2\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2}{\left\{\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2 - 4\,s_0^2\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right\}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Im Falle der Rechteckplatte, für die $s_0 = 0$ und $c_0 = 1$ ist, erhält man

$$\left.\begin{aligned} c_{m\,n} &= 0\,, \\ d_{m\,n} &= \frac{16\,p_0}{\pi^2\,B}\,\frac{1}{m \cdot n\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

4. Umformung der Koeffizienten in dem Integral w_0 der Biegefläche. Das wichtige Problem besteht nun darin, die errechneten Koeffizienten von w_0 so umzuformen, daß die vorliegenden Doppelreihen in einfache *Fourier*reihen entwickelt werden können. Zunächst ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\bar b}{\bar a^2-\bar b^2} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar a+\bar b}-\frac{1}{\bar a-\bar b}\right),\\ \frac{\bar a}{\bar a^2-\bar b^2} &= +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar a+\bar b}+\frac{1}{\bar a-\bar b}\right).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Setzt man $\vartheta = s_0 + i\,c_0$ und $\vartheta' = s_0 - i\,c_0$, so ergibt sich für $\bar a + \bar b$ und $\bar a - \bar b$ nach einer leichten Rechnung

$$\bar a + \bar b = \left\{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)+\vartheta\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right]\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)+\vartheta'\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right]\right\}^2,$$

$$\bar a - \bar b = \left\{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)-\vartheta\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right]\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)-\vartheta'\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right]\right\}^2.$$

Damit erhalten wir für die Quotienten dieser Ausdrücke

$$\frac{1}{\bar a+\bar b} = \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2(\vartheta'-\vartheta)^2}\left\{\frac{1}{\left[\frac{m\pi}{a}+\vartheta\frac{n\pi}{b}\right]^2}+\frac{1}{\left[\frac{m\pi}{a}+\vartheta'\frac{n\pi}{b}\right]^2}-\frac{2}{\left[\frac{m\pi}{a}+\vartheta\frac{n\pi}{b}\right]\left[\frac{m\pi}{a}+\vartheta'\frac{n\pi}{b}\right]}\right\}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\bar a-\bar b} = \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2(\vartheta'-\vartheta)^2}\left\{\frac{1}{\left[\frac{m\pi}{a}-\vartheta\frac{n\pi}{b}\right]^2}+\frac{1}{\left[\frac{m\pi}{a}-\vartheta'\frac{n\pi}{b}\right]^2}-\frac{2}{\left[\frac{m\pi}{a}-\vartheta\frac{n\pi}{b}\right]\left[\frac{m\pi}{a}-\vartheta'\frac{n\pi}{b}\right]}\right\}. \tag{13}$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$\left.\begin{aligned}\omega &= a\frac{n\pi}{b}\,i\,\vartheta = \frac{\pi n}{\lambda}\,i\,\vartheta = \frac{\pi n}{\lambda}(s_0+i\,c_0)\,i = \frac{\pi n}{\lambda}(i\,s_0-c_0) = \gamma_n\,i-\delta_n,\\ \acute\omega &= a\frac{n\pi}{b}\,i\,\vartheta' = \frac{\pi n}{\lambda}\,i\,\vartheta' = \frac{\pi n}{\lambda}(s_0-i\,c_0)\,i = \frac{\pi n}{\lambda}(i\,s_0+c_0) = \gamma_n\,i+\delta_n.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wobei

$$\lambda = \frac{b}{a}, \qquad \gamma_n = \frac{\pi n}{\lambda}s_0, \qquad \delta n = \frac{\pi n}{\lambda}c_0 \tag{15}$$

gesetzt wurde, so ergibt sich bei geeigneter Zusammenfassung aus (11), (12) und (13)

$$\frac{\bar a}{\bar a^2-\bar b^2} = \frac{a^4}{(\acute\omega-\omega)^2}\left[\frac{\omega^2-m^2\pi^2}{(m^2\pi^2+\omega^2)^2}+\frac{\acute\omega^2-m^2\pi^2}{(m^2\pi^2+\acute\omega^2)^2}-2\,\frac{\acute\omega\cdot\omega-m^2\pi^2}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute\omega^2)}\right], \tag{16}$$

$$\frac{\bar b}{\bar a^2-b^2} = \frac{2a^4\,i}{(\acute\omega-\omega)^2}\left[\frac{m\pi\omega}{(m^2\pi^2+\omega^2)^2}+\frac{m\pi\acute\omega}{(m^2\pi^2+\acute\omega^2)^2}-\frac{m\pi\cdot(\acute\omega+\omega)}{(m^2\pi^2+\omega^2)\cdot(m^2\pi^2+\acute\omega^2)}\right]. \tag{17}$$

Die Koeffizienten der Doppelreihe nehmen damit folgende Werte an:

$$c_{mn} = -\frac{2\,a^4\,\bar c\,\pi\,i}{(\acute\omega-\omega)^2\,n}\left[\frac{\omega}{(m^2\pi^2+\omega^2)^2}+\frac{\acute\omega}{(m^2\pi^2+\acute\omega^2)^2}-\frac{\acute\omega+\omega}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute\omega'^2)}\right], \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}d_{mn} = +\frac{a^4\,\bar c\,\pi}{(\acute\omega-\omega)^2\,n}\Bigg[&\frac{\omega^2}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)^2}+\frac{\acute\omega^2}{(m\pi)(m^2\pi^2+\acute\omega^2)^2}-\frac{2\,\acute\omega\cdot\omega}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute\omega^2)}\\ &-\frac{m\pi}{(m^2\pi^2+\omega^2)^2}-\frac{m\pi}{(m^2\pi^2+\acute\omega^2)^2}+2\,\frac{m\pi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute\omega^2)}\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Wir setzen nun noch

$$\frac{x}{a} = \xi, \qquad \frac{y}{a} = \eta, \qquad K = \frac{4\,p_0\,a^2\,b^2\,c_0^2}{\pi^3\,B}$$

und führen folgende Funktionen ein:

$$f_1(\xi) \equiv \frac{\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\acute\omega^2)^2}, \qquad f_2(\xi) \equiv \frac{\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\acute\omega^2)^2}, \qquad f_3(\xi) \equiv \frac{\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute\omega^2)}$$

mit

$$F_n(\xi) = -2\,K\,i\sum_m\left[\omega f_1(\xi)+\acute\omega f_2(\xi)-(\acute\omega+\omega)f_3(\xi)\right] \tag{20}$$

und

$$g_1(\xi)=\frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)^2},\quad g_2(\xi)=\frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)^2},\quad g_3(\xi)=\frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)},$$

$$g_4(\xi)=\frac{(m\pi)\sin m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)^2},\quad g_5(\xi)=\frac{(m\pi)\sin m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)^2},\quad g_6(\xi)=\frac{(m\pi)\sin m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)}$$

mit

$$G_n(\xi)=K\sum_m\left[\omega^2 g_1(\xi)+\acute{\omega}^2 g_2(\xi)-2\,\acute{\omega}\,\omega\, g_3(\xi)-g_4(\xi)-g_5(\xi)+2\,g_6(\xi)\right]. \tag{21}$$

Damit geht die Gleichung für w_0 über in

$$w_0(\xi,\eta)=\sum_n\left(F_n(\xi)\frac{\cos\frac{n\pi}{\lambda}\eta}{n^3}+G_n(\xi)\frac{\sin\frac{\pi n}{\lambda}\eta}{n^3}\right). \tag{22}$$

5. Wichtige mathematische Formeln zur Umwandlung der Doppelreihe. Zur Umgestaltung der auftretenden Doppelreihen benötigen wir verschiedene Summierungen von *Fourier*-Reihen, die mit Hilfe der bei *A. Kneser*[1] angegebenen Formel

$$\sum_m\frac{\cos m(\pi-\vartheta)}{m^2+a^2}=-\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi\,\mathfrak{Cof}\,a\vartheta}{2a\,\mathfrak{Sin}\,a\pi}\qquad\begin{matrix}(-\pi\le\vartheta\le+\pi)\\(m=1,2,3,4,\ldots)\end{matrix} \tag{23}$$

möglich sind. Setzt man in dieser Reihenbeziehung an Stelle von $\pi-\vartheta$ bzw. a die Werte $\pi\frac{x}{a}=\pi\xi$ bzw. $\frac{\omega}{a}$, so erhält man die dem Problem angepaßte Form

$$\sum_m\frac{\cos m\pi\xi}{m^2\pi^2+\omega^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega(1-\xi)}{\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega}-\frac{1}{\omega^2}\right]\qquad(-1\le\xi\le+1). \tag{24}$$

Mit der Beziehung

$$\frac{1}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)}=\frac{1}{\acute{\omega}^2-\omega^2}\left(\frac{1}{m^2\pi^2+\omega^2}-\frac{1}{m^2\pi^2+\acute{\omega}^2}\right) \tag{25}$$

erhält man aus (24) die für uns wichtige Formel

$$\sum_m\frac{\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\acute{\omega}^2-\omega^2}\left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega(1-\xi)}{\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega}-\frac{\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}(1-\xi)}{\acute{\omega}\cdot\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}}\right]-\frac{1}{(\omega\acute{\omega})^2}\right\}. \tag{26}$$

Ersetzt man in dieser Beziehung die Variable ξ durch $1-\xi$, so ist $\cos m\pi(1-\xi)=(-1)^m\cos m\pi\xi$, und Formel (26) geht über in

$$\sum_m\frac{(-1)^m\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\acute{\omega}^2-\omega^2}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega\xi}{\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega}-\frac{\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\xi}{\acute{\omega}\,\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}}\right)-\frac{1}{(\omega\cdot\acute{\omega})^2}\right]. \tag{27}$$

Durch Subtraktion der Reihenformel (27) von (26) erhält man eine der Formel (26) entsprechende für ungerade m gültige Beziehung:

$$\left.\begin{aligned}\sum_m\frac{\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)}&=\frac{1}{2}\sum_m\frac{[1-(-1)^m]\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)}\\&=\frac{1}{4(\acute{\omega}^2-\omega^2)}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\omega\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}}-\frac{\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\acute{\omega}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}}\right]\qquad(m=1,3,5,7,\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Differentiiert man diese Formel nach der Variablen ξ so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\sum_m\frac{(m\pi)\sin m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)}&=\frac{1}{4(\acute{\omega}^2+\omega^2)}\left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}}-\frac{\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}}\right]\\&(m=1,3,5,\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

[1] *A. Kneser*, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathem. Physik, S. 148, Braunschweig 1911.

Ersetzt man in der Formel (24) die Variable ξ durch $1 - \xi$, so geht diese Formel in

$$\sum_m \frac{(-1)^m \cos m\pi\xi}{m^2\pi^2 + \omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega\xi}{\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{30}$$

über. Aus Formel (24) und (30) ergibt sich durch Subtraktion für ungerade m

$$\sum_m \frac{\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)} = \frac{1}{2}\sum_m \frac{[1-(-1)^m]\cos m\pi\xi}{m^2\pi^2+\omega^2} = \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\omega\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\omega}{2}} \quad \begin{matrix}(m=1,3,5\ldots)\\(0<\xi<1).\end{matrix} \tag{31}$$

Daraus erhält man unmittelbar durch Differentiation nach ω

$$\left.\sum_m \frac{\cos m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)^2} = \frac{2\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\left[\omega\xi\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right]-\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega\xi}{16\,\omega^3\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\omega}{2}}\right\} \tag{32}$$

$$(m=1,3,5,\ldots).$$

Nochmalige Differentiation nach ξ ergibt

$$\sum_m \frac{(m\pi)\sin m\pi\xi}{(m^2\pi^2+\omega^2)^2} = \frac{2\xi\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\mathfrak{Sin}\,\omega\xi}{16\,\omega\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\omega}{2}} \qquad (m=1,3,5,7,\ldots). \tag{33}$$

Integriert man Formel (23) auf beiden Seiten nach der Variablen ϑ von ϑ bis π, so ergibt sich eine weitere für uns wichtige Reihenbeziehung

$$\sum_m \frac{\sin m(\pi-\vartheta)}{m(m^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\left(\vartheta - \frac{\pi\,\mathfrak{Sin}\,a\vartheta}{\mathfrak{Sin}\,a\pi}\right) \qquad (m=1,2,3,4,\ldots). \tag{34}$$

Ersetzen wir in dieser Beziehung wieder $\pi - \vartheta$ durch $\pi\xi$ und $a\pi$ durch ω, so erhalten wir

$$\sum_m \frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)} = \frac{1}{2\omega^2}\left[(1-\xi) - \frac{\mathfrak{Sin}\,\omega(1-\xi)}{\mathfrak{Sin}\,\omega}\right] \qquad (m=1,2,3,4,\ldots). \tag{35}$$

Mittels der Beziehung (25) erhält man damit

$$\sum_m \frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\acute{\omega}^2-\omega^2}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega(1-\xi)}{\omega^2\,\mathfrak{Sin}\,\omega} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}(1-\xi)}{\acute{\omega}^2\,\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}}\right] + \frac{1-\xi}{(\omega\cdot\acute{\omega})^2}\right\}. \tag{36}$$

Differentiation von Formel (35) nach ω ergibt

$$\left.\begin{aligned}\sum_m \frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)^2} \\ = -\frac{1}{\omega^4}\left\{\frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega(1-\xi)+\omega[\xi\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega(1-\xi)-\mathfrak{Sin}\,\omega\xi]}{\mathfrak{Sin}^2\,\omega} - 2(1-\xi)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ersetzt man nun noch in Formel (37) und (36) ξ durch $1-\xi$, und beachtet, daß $\sin m\pi(1-\xi) = -(-1)^m \sin m\pi\xi$ ist, so gehen die Formeln über in

$$\sum_m \frac{(-1)^m \sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)} = -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\acute{\omega}^2-\omega^2}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\omega\xi}{\omega^2\,\mathfrak{Sin}\,\omega} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}\xi}{\acute{\omega}^2\,\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}}\right] + \frac{\xi}{(\omega\cdot\acute{\omega})^2}\right\}, \tag{38}$$

$$\sum_m \frac{(-1)^m \sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)^2} = +\frac{1}{4}\left\{\frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega\xi+\omega[\mathfrak{Cof}\,\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega\xi-\xi\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega\xi]}{\mathfrak{Sin}^2\,\omega} - 2\xi\right\}. \tag{39}$$

Subtraktion der Formel (38) von (36) bzw. (39) von (37) ergibt wieder die entsprechenden Formeln für ungerade m

$$\sum_m \frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)(m^2\pi^2+\omega^2)(m^2\pi^2+\acute{\omega}^2)} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{\acute{\omega}^2-\omega^2}\left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\omega^2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\omega}{2}} - \frac{\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\acute{\omega}^2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\acute{\omega}}{2}}\right] + \frac{1}{(\omega\cdot\acute{\omega})^2}\right\}, \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_m \frac{\sin m\pi\xi}{(m\pi)\,(m^2\pi^2+\omega^2)^2} \\ &= +\frac{1}{4\,\omega^4}\left\{1-\frac{2\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\left[\omega\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+2\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right]+\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\xi}{4\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\omega}{2}}\right\} \quad (m=1,3,5,7\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Damit sind die zur Umwandlung der Doppelreihen notwendigen Reihenbeziehungen hergeleitet.

6. Die Umwandlung der Doppelreihe. Führt man nun in die Größen $F_n(\xi)$ und $G_n(\xi)$ von (20) und (21) die ermittelten Reihenbeziehungen ein, so erhält man nach längerer Zwischenrechnung und geeigneter Zusammenfassung

$$\left.\begin{aligned} F_n(\xi) = -2\,K\,i\Bigg[&\frac{\xi}{8}\,\frac{\acute{\omega}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\omega\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{(\omega\cdot\acute{\omega})\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}} \\ &+\frac{1}{8}\,\frac{\acute{\omega}^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\omega^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{(\omega\,\acute{\omega})^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}} \\ &-\frac{1}{4}\,\frac{\acute{\omega}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)-\omega\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{(\acute{\omega}-\omega)\,(\acute{\omega}\cdot\omega)\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}} \\ &-\frac{1}{16}\,\frac{\acute{\omega}\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega\,\xi+\omega\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\,\xi}{(\acute{\omega}\cdot\omega)\left(\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\right)^2}\Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned} G_n(\xi) = K\Bigg[&-\frac{\xi}{4}\,\frac{\acute{\omega}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\omega\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{(\acute{\omega}\,\omega)\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}} \\ &-\frac{1}{4}\,\frac{\acute{\omega}^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)+\omega^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{(\omega\cdot\acute{\omega})^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}} \\ &-\frac{1}{8}\,\frac{\acute{\omega}\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\xi+\omega\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\acute{\omega}\,\xi}{(\omega\cdot\acute{\omega})\left(\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\right)^2} \\ &+\frac{1}{2\,(\acute{\omega}^2-\omega^2)}\,\frac{\acute{\omega}^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)-\omega^2\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{(\omega\cdot\acute{\omega})\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}} \\ &+\frac{1}{2\,(\acute{\omega}^2-\omega^2)}\,\frac{\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{1}{2}-\xi\right)-\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\acute{\omega}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)}{\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\acute{\omega}}{2}}+\frac{(\acute{\omega}-\omega)^2}{4\,(\omega\cdot\acute{\omega})^2}\Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Dabei ist nach (14) und (15)

$$\left.\begin{aligned} &\acute{\omega}+\omega = 2\,\gamma_n\,i\,, \\ &\acute{\omega}-\omega = 2\,\delta_n\,, \\ &\acute{\omega}\cdot\omega = -\left(\frac{\pi n}{\lambda}\right)^2, \\ &\acute{\omega}^2 = (\delta_n^2-\gamma_n^2)+2\,\gamma_n\,\delta_n\,i = \left(\frac{\pi n}{\lambda}\right)^2[(c_0^2-s_0^2)+2s_0\cdot c_0\,i]\,, \\ &\omega^2 = (\delta_n^2-\gamma_n^2)-2\,\gamma_n\,\delta_n\,i = \left(\frac{\pi n}{\lambda}\right)^2[(c_0^2-s_0^2)-2\,s_0\,c_0\,i]\,, \\ &\acute{\omega}^2-\omega^2 = 4\,\gamma_n\,\delta_n\,i \qquad\quad = 4\left(\frac{\pi n}{\lambda}\right)^2 s_0'\,c_0\,i\,. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Wir führen nun noch die folgenden Ausdrücke ein:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi\cos\gamma_n(1-\xi) + \mathfrak{Cof}\ \delta_n(1-\xi)\cos\gamma_n\,\xi\,,\\ M_2 &= \mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\xi\cos\gamma_n(1-\xi) - \mathfrak{Sin}\ \delta_n(1-\xi)\cos\gamma_n\,\xi\,,\\ M_3 &= (1+\cos\gamma_n\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n)\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi\cos\gamma_n\,\xi + \sin\gamma_n\cdot\mathfrak{Sin}\ \delta_n\sin\gamma_n\,\xi\,\mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\xi\,,\\ -M_4 &= (1+\cos\gamma_n\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n)\,\mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\xi\cos\gamma_n\,\xi + \sin\gamma_n\cdot\mathfrak{Sin}\ \delta_n\sin\gamma_n\,\xi\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi\,, \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\xi\sin\gamma_n(1-\xi) + \mathfrak{Sin}\ \delta_n(1-\xi)\sin\gamma_n\,\xi\,,\\ N_2 &= \mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi\sin\gamma_n(1-\xi) - \mathfrak{Cof}\ \delta_n(1-\xi)\sin\gamma_n\,\xi\,,\\ N_3 &= (1+\cos\gamma_n\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n)\,\mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\xi\cdot\sin\gamma_n\,\xi - \sin\gamma_n\,\mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi\cdot\cos\gamma_n\,\xi\,,\\ N_4 &= (1+\cos\gamma_n\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n)\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi\cdot\sin\gamma_n\,\xi - \sin\gamma_n\,\mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\xi\cdot\cos\gamma_n\,\xi\,. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (42), (43) und (22) erhält man schließlich nach einer längeren Zwischenrechnung für die Funktion w_0 die einfache *Fourier*reihe

$$\left.\begin{aligned} w_0(\xi,\eta) = \frac{P_0\,b^4\,c_0}{\pi^5\,B}\sum_n \Bigg\{ &\Bigg[\frac{c_0\frac{\pi n}{\lambda}(s_0\,M_3 - c_0\,N_3)}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}c_0 + \cos\frac{\pi n}{\lambda}s_0} - \xi\,c_0\frac{\pi n}{\lambda}(s_0\,M_1 + c_0\,N_1)\\ &+ [2\,c_0^3\,N_2 + s_0(3-2\,s_0^2)\,N_2]\Bigg]\frac{\cos\frac{\pi n}{\lambda}\eta}{n^5\left(\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}c_0 + \cos\frac{\pi n}{\lambda}s_0\right)}\\ &+ \Bigg[\frac{c_0\frac{\pi n}{\lambda}(c_0\,M_4 - s_0\,N_4)}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}c_0 + \cos\frac{\pi n}{\lambda}s_0} + \xi\frac{\pi n}{\lambda}c_0(c_0\,M_2 - s_0\,N_2) + 2\,c_0^3\left(\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}c_0 + \cos\frac{\pi n}{\lambda}s_0\right)\\ &- [2\,c_0^3\,M_1 - s_0(3-2\,s_0^2)\,N_1]\Bigg]\frac{\sin\frac{n\pi}{\lambda}\eta}{n^5\left(\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}c_0 + \cos\frac{\pi n}{\lambda}s_0\right)}\Bigg\} \qquad (n = 1, 3, 5, 7\cdots). \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Wird der Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Punkt $(a/2, 0)$ verschoben, so hat man in den Formeln (45), (46) und (47) lediglich an Stelle von ξ den Wert $\frac{1}{2} + \xi$ zu setzen.

Kommt schließlich der Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Platte zu liegen, so ist noch η/λ durch $\frac{1}{2} + \eta/\lambda$ zu ersetzen und zu beachten, daß damit

$$\sin n\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi}{\lambda}\eta \quad \text{und} \quad \cos n\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{\pi n}{\lambda}\eta \qquad (48)$$

wird.

7. Der Spezialfall der rechteckigen Platte. Im Falle der rechteckigen Platte ist $\varphi = 0$ und damit $s_0 = 0$ und $c_0 = 1$, sowie alle $N_K = 0$. Aus Formeln (46) ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathfrak{Cof}\ {}_n\delta(1-\xi) + \mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi = 2\,\mathfrak{Cof}\frac{\delta_n}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\delta_n\left(\frac{1}{2} - \xi\right),\\ M_2 &= \mathfrak{Sin}\ \delta_n - \mathfrak{Sin}\ \delta_n(1-\xi) = -\,2\,\mathfrak{Cof}\frac{\delta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\delta_n\left(\frac{1}{2} - \xi\right),\\ M_3 &= (1+\mathfrak{Cof}\ \delta_n)\,\mathfrak{Cof}\ \delta_n\,\xi = 2\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\delta n}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\delta_n\,\xi\,,\\ M_4 &= -\,(1+\mathfrak{Cof}\ \delta_n)\,\mathfrak{Sin}\ \delta_n\,\xi = -\,2\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\delta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\delta_n\,\xi\,. \end{aligned}$$

Aus (47) erhalten wir damit im Falle der Rechteckplatte

$$\begin{aligned} &w_0(\xi,\eta) =\\ &= \frac{p_0\,b^4}{\pi^5\,B}\sum_n\left\{1 - \frac{\frac{\pi n}{\lambda}\left[2\,\xi\,\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{2\lambda}\,\mathfrak{Sin}\frac{\pi n}{\lambda}\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \mathfrak{Si}\pi\frac{\pi n}{\lambda}\xi\right] + 4\,\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{2\lambda}\cdot\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)}{4\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\pi n}{2\lambda}}\right\}\frac{\sin\frac{n\pi}{\lambda}\eta}{n^5}\\ &\qquad (n = 1, 3, 5, 7\cdots). \qquad (49) \end{aligned}$$

Wendet man, die unter (41) angegebene Reihenformel auf den Fall der Rechteckplatte an, so geht (49) in die wohlbekannte Formel von *Navier* über:

$$w_0(\xi,\eta) = \frac{16\, p_0\, a^4}{\pi^2\, B} \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi\xi \sin \frac{\pi n}{\lambda}\eta}{(m\cdot n)\,(m^2\pi^2+\omega^2)^2}. \tag{50}$$

Verschiebt man den Koordinatenanfangspunkt in den Punkt $(a/2, 0)$ der Platte, so ist wieder ξ durch $\frac{1}{2}+\xi$ zu ersetzen und man erhält in Übereinstimmung mit *Iguchi*

$$w_0(\xi,\eta) = \frac{p_0\, b^4}{\pi^5 B} \sum_m \left\{1 - \frac{2\,\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{2\lambda}\,\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}\xi + \frac{\pi n}{\lambda}\left[\frac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\pi n}{2\lambda}\,\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{\lambda}\xi - \xi\,\mathfrak{Cof}\frac{\pi n}{2\lambda}\,\mathfrak{Sin}\frac{\pi n}{\lambda}\xi\right]}{2\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\pi n}{2\lambda}}\right\} \frac{\sin\frac{\pi n}{\lambda}\eta}{n^5}. \tag{51}$$

Wird der Anfangspunkt noch in den Mittelpunkt der Platte verlegt, so ist in der Formel (51) noch $\sin\frac{n\pi}{\lambda}\eta$ durch $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi}{\lambda}\eta$ zu ersetzen.

8. Lösung der homogenen Differentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$. Legt man den Koordinatenanfangspunkt in die untere linke Ecke der Platte, so kann das Integral w_1 der homogenen Gleichung bei Berücksichtigung der Polarsymmetrie zum Mittelpunkt in der Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} w_1(\xi,\eta) = \\ = \sum_m \Big[&\cos m\pi\Big[\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)+s_0\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\Big]\Big\{c_{1m}\,\mathfrak{Cof}\, m\pi\, c_0\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)+c_{2m}\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\cdot \mathfrak{Sin}\, m\pi\, c_0\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\Big\} \\ &+\sin m\pi\Big[\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)+s_0\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\Big]\Big\{c_{3m}\,\mathfrak{Sin}\, m\pi c_0\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)+c_{4m}\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\mathfrak{Cof}\, m\pi\, c_0\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\Big\}\Big] \\ +\sum_n \Big[&\cos n\pi\Big[s_0\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)+\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\Big]\Big\{d_{1n}\,\mathfrak{Cof}\, n\pi\, c_0\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)+d_{2n}\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\, c_0\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)\Big\} \\ &+\sin n\pi\Big[s_0\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)+\Big(\eta-\tfrac{\lambda}{2}\Big)\Big]\Big\{d_{3n}\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\, c_0\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)+d_{4n}\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)\,\mathfrak{Cof}\, n\pi\, c_0\Big(\xi-\tfrac{1}{2}\Big)\Big\}\Big]. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten c_{iK} und d_{iK} lassen sich hier, wie in ähnlichen Problemen (eingespannte Rechteckplatte usw.) zwar nicht in endlicher Form darstellen, sind aber, wie *Lardy* für den Fall der vollbelasteten schiefwinkligen Platte eingehend gezeigt hat aus den Randbedingungen mittels Interationsverfahren gut bestimmbar.

In einer weiteren Arbeit soll auf andere Belastungsfälle und auf die Bestimmung der Momente näher eingegangen werden.

(Eingegangen am 24. Juni 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *J. Krettner*, München 13, Gentzstr. 5 III l.

Zur Stabilität der periodischen, erzwungenen Rollschwingungen eines Schiffes.

Von O. Grim.

Die periodischen erzwungenen Schwingungen eines einfachen Schwingers mit nicht gerader Kennlinie, die durch die Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + f(x) = P \sin(\omega t) \tag{1}$$

beschrieben werden, sind nicht immer stabil. Für bestimmte Wertepaare P, ω gibt es drei verschiedene Lösungen dieser Differentialgleichung, von denen eine Lösung instabil ist und daher nicht verwirklicht werden kann.

Die bekannten, bisher durchgeführten Untersuchungen der Stabilität dieser Schwingungen[1] gelten aber nur für kleine Abweichungen der Federcharakteristik $f(x)$ von dem linearen Verlauf. Es gibt indessen Fälle, in denen die Abweichungen sehr groß sind. Ein solcher Fall liegt z. B. bei den Rollschwingungen eines Schiffes, für die die Bewegungsgleichung

$$\Theta \ddot{\varphi} + G\,h(\varphi) = M \tag{2}$$

lautet, vor. Das Stabilitätsmoment Gh, das bestrebt ist, das gekrängte Schiff wieder aufzurichten, ist nur für kleine Winkel φ proportional zu diesem Winkel. Es gibt aber auch Rollschwingungen mit Amplituden, für die das lineare Gesetz für das Rückstellmoment längst nicht mehr gilt. Und da die Größe des Stabilitätsmomentes so bemessen werden muß, daß das Schiff niemals in die Gefahr des Kenterns kommen kann, so ist der ganze Bereich bis zu dem statischen Kenterwinkel φ_k, für den das Stabilitätsmoment zu Null wird, von praktischer Bedeutung (Abb. 1).

Nun genügt das bisher bekannte Ergebnis der erwähnten Untersuchungen, nämlich daß in dem Fall, daß es drei verschiedene Lösungen der Bewegungsgleichung gibt, die beiden Lösungen mit dem kleinsten und dem größten Amplitudenwert von φ stabil sind und die dritte Lösung instabil ist, für das Beispiel des Schiffes

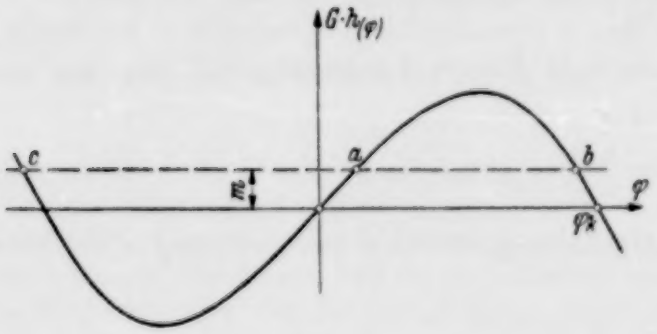

Abb. 1.

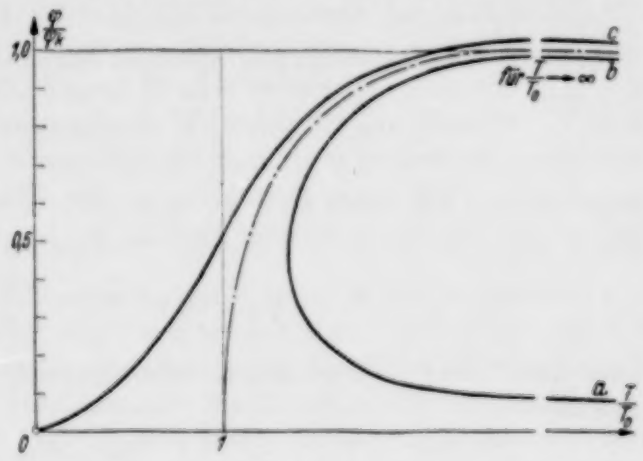

Abb. 2.

nicht: Wenn z. B. die Kurven für die Lösungen der Bewegungsgleichung (ohne Dämpfung) des Schiffes in dem (φ, T)-Diagramm Abb. 2 bis zu der Periode $T = \infty$ geführt werden, müssen die Kurven für $T = \infty$ in die drei Punkte einmünden, die auch als statische Gleichgewichtslagen unmittelbar aus dem Diagramm für das Stabilitätsmoment gewonnen werden können (Abb. 1). Wenn das Ergebnis der Untersuchungen der Stabilität der erzwungenen Schwingungen auf diesen Fall ausgedehnt werden dürfte, müßte der jeweils oberste und unterste Ast der in Abb. 2 gezeichneten Kurve stabil sein. Die Betrachtung des Verlaufs des Stabilitätsmomentes in Abb. 1 zeigt aber sofort, daß bei statischer Beanspruchung, also für $T = \infty$, nur die Gleichgewichtslage (a) stabil sein kann. Daraus muß geschlossen werden, daß auch der oberste Ast in dem Diagramm Abb. 2 nicht nur stabile Bewegungszustände, sondern von einem noch unbekannten Punkt an auch instabile Bewegungszustände umfaßt. Es ist offen-

[1] Siehe z. B. *J. J. Stoker*, Non-linear vibrations. S. 114 u. 213 ff., New York 1950.

sichtlich, daß für das Beispiel des Schiffes der vollständigen Lösung des Problems eine praktische Bedeutung zukommt.

Die bekannten Stabilitätsuntersuchungen wurden auf dem folgenden Weg geführt: Die periodischen, erzwungenen Schwingungen des Schiffes sind durch die Lösungen der Bewegungsgleichung (2) gegeben. Wenn nun eine kleine Abweichung ψ von der periodischen Lösung φ irgendwie zustandekommt, gilt hierfür

$$\Theta(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) + Gh(\varphi + \psi) = M \tag{3}$$

oder, wenn man hiervon (2) abzieht

$$\Theta\ddot{\psi} + G[h(\varphi + \psi) - h(\varphi)] = 0. \tag{4}$$

Diese Differentialgleichung für ψ, in die man für φ die aus (2) resultierende periodische Lösung, deren Stabilität untersucht werden soll, einzusetzen hat, ist durch periodisch veränderliche Koeffizienten gekennzeichnet. Für diese Differentialgleichung existieren stabile und instabile Bereiche, in denen die Lösung ψ entweder mit der Zeit abklingt und verschwindet oder unbeschränkt anwächst. Durch die Feststellung, ob für eine bestimmte Lösung φ die Lösung der Differentialgleichung (4) in einen stabilen oder instabilen Bereich fällt, ist die Frage nach der Stabilität der Lösung φ entschieden.

Es entsteht also nun die Frage, ob dieser Weg in dem Beispiel des Schiffes auch bis zu so großen Winkeln φ, für die die Hebelarmkurve $h(\varphi)$ den maximalen Wert überschritten hat und sich wieder der Null nähert, beschritten werden kann und ein brauchbares Ergebnis liefert. Diese Frage kann ohne Schwierigkeiten beantwortet werden, wie folgt.

Für diese Untersuchung wird eine einfache Hebelarmkurve angenommen, die keinen Wendepunkt besitzt und die mathematisch durch

$$\frac{G}{\Theta}h(\varphi) = \omega_0^2\varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_k^2}\right) \tag{5}$$

ausgedrückt werden kann. Außerdem wird zunächst angenommen, daß die erzwungene Rollschwingung genau sinusförmig verläuft:

$$\varphi = \overline{\varphi}\sin(\omega t),$$

d. h. also, daß das erregende Moment durch den aus (2) hierbei bestimmten Wert

$$\frac{M}{\Theta} = \overline{\varphi}\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{4}\omega_0^2\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\right)\sin(\omega t) + \overline{\varphi}\,\frac{\omega_0^2}{4}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\sin(3\omega t)$$

gegeben ist. Ob diese Bewegung $\overline{\varphi}\sin(\omega t)$ stabil und daher verwirklichbar ist, folgt aus der Gleichung (4), die in diesem Fall die Form

$$\ddot{\psi}\ddot{\psi} + \psi\omega_0^2\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2} + \frac{3}{2}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\cos(2\omega t)\right] = 0 \tag{6}$$

annimmt. Das ist eine *Mathieu*sche Differentialgleichung. Wenn diese Gleichung in die Normalform

$$\ddot{\psi} + \psi(\lambda + \gamma\cos x) = 0 \tag{7}$$

gebracht wird, sind die Parameter λ und γ

$$\lambda = \frac{1}{4}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\right) \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{3}{8}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}. \tag{8}$$

Für die *Mathieu*sche Differentialgleichung enthält die bekannte *Ince-Strutt*sche Karte die Grenzkurven $\gamma = f(\lambda)$, die die stabilen Bereiche der Lösung von den instabilen Bereichen trennen. Da für jedes Wertepaar λ, γ aus (8) ein Wertepaar ω_0/ω, $\overline{\varphi}/\varphi_k$ bestimmt werden kann, können die Grenzkurven der *Ince-Strutt*schen Karte in das Diagramm $(\omega_0/\omega,\ \overline{\varphi}/\varphi_k)$ bzw. $(T/T_0,\ \overline{\varphi}/\varphi_k)$ übertragen werden (Abb. 3). Dieses Diagramm zeigt unmittelbar und anschaulich, für welche Wertepaare ω, $\overline{\varphi}$ die erzwungene periodische Schwingung $\overline{\varphi}\sin(\omega t)$ stabil oder instabil ist. Das Diagramm zeigt, daß tatsächlich der oberste Ast der Kurve für die erzwungene Schwingung (Abb. 2) nicht für alle Perioden stabil ist. Das Diagramm 3 enthält auch die Kurve $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\right)$, für die das erregende Moment kein Glied mit der Kreisfrequenz ω enthält.

Die obere der beiden von $T/T_0 = 1$ ausgehenden Grenzkurven (b) schmiegt sich für kleine Winkel φ der Kurve $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_k^2}\right)$ eng an. Bemerkenswert ist die mit (a) bezeichnete Grenzkurve und die Feststellung, daß die Instabilität der erzwungenen Schwingung schon bei Winkeln unterhalb des Kenterwinkels φ_k beginnen kann.

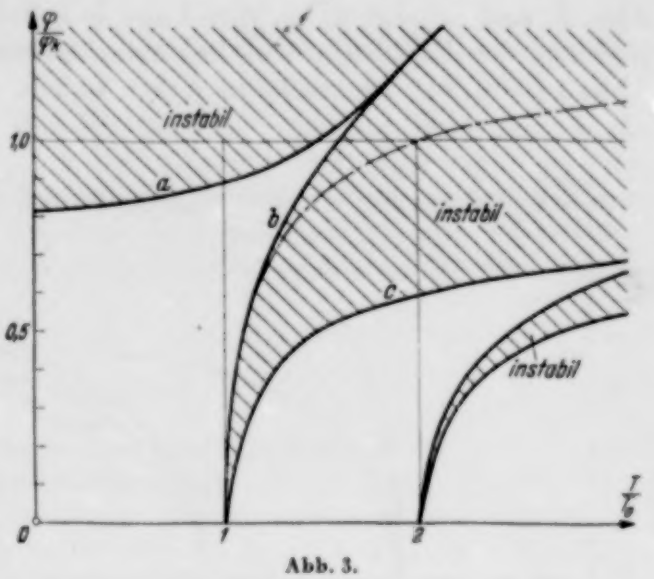

Abb. 3.

Das Diagramm Abb. 3 gilt streng nur für die rein sinusförmige erzwungene Schwingung. Es wird vermutlich für ein rein sinusförmiges erregendes Moment nicht viel anders aussehen. Um zu einem Urteil hierüber zu kommen, wird zunächst als erster Schritt in die Bewegungsgleichung (2) der Ansatz

$$\varphi = \overline{\varphi}_1 \sin(\omega t) + \overline{\varphi}_2 \sin(3\omega t) \qquad (9)$$

eingeführt und das Verhältnis der Amplituden $\overline{\varphi}_2/\varphi_1$ so gewählt, daß für das erregende Moment das Glied mit der Kreisfrequenz 3 ω wegfällt. Daraus folgt das Amplitudenverhältnis

$$\frac{\overline{\varphi}_2}{\overline{\varphi}_1} \approx \frac{1}{4}\frac{\overline{\varphi}_1^2}{\varphi_k^2}\frac{1}{9\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 + \frac{3}{2}\frac{\overline{\varphi}_1^2}{\varphi_k^2}} \qquad (10)$$

und für die Untersuchung der Stabilität dieser Bewegung an Stelle von (6) die Differentialgleichung

$$\ddot{\psi} + \psi\,\omega_0^2\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\overline{\varphi}_1^2}{\varphi_k^2} + \frac{3}{2}\frac{\overline{\varphi}_1^2}{\varphi_k^2}\left(1 - 2\frac{\overline{\varphi}_2}{\overline{\varphi}_1}\right)\cos(2\omega t) + 3\frac{\overline{\varphi}_1\overline{\varphi}_2}{\varphi_k^2}\cos(4\omega t)\right] = 0. \qquad (11)$$

Diese Rechnungen zeigen, daß der Einfluß des Gliedes $\overline{\varphi}_2 \sin(3\omega t)$ für große Frequenzen ω bzw. große Verhältnisse ω^2/ω_0^2 sowie für kleine Winkel φ bzw. kleine Verhältnisse $\overline{\varphi}_1/\varphi_k$ sehr klein sein muß. Daraus folgt, daß für ein rein sinusförmiges Moment die Grenzkurve (a) in dem (φ, T)-Diagramm bei kleinen Perioden ebenso verlaufen muß wie in dem Diagramm Abb. 3; das Gleiche muß für die Grenzkurven (b) und (c) für sehr kleine Winkel gelten.

Es sind aber noch weitergehendere Folgerungen möglich: Wenn in (2) das Moment $M = 0$ gesetzt wird, so liefert diese Gleichung die freie Schwingung, die natürlich periodisch verlaufen muß. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$\Theta\dddot{\varphi} + G\,\dot{\varphi}\,h'(\varphi) = 0. \qquad (12)$$

Diese Differentialgleichung ist aber identisch mit (4), wenn $\dot{\varphi}$ durch ψ ersetzt wird, wenn (4) auf die freie Schwingung angewandt und ψ als sehr klein angesehen wird. Da nun in (12) die aus der freien Schwingung folgende Lösung $\dot{\varphi}$ ein periodischer und damit beschränkter Wert ist, muß auch ψ in (4) für diesen Fall ein periodischer und beschränkter Wert sein, wobei dieser Wert ψ zwar ebenso wie $\dot{\varphi}$ von der Zeit abhängig sein muß, aber als sehr kleine Größe angesehen werden kann. Das beweist, daß, gleichgültig wie die Hebelarmkurve $h(\varphi)$ verläuft, die Kurve in dem (φ, T)-Diagramm, die die freie Schwingung bezeichnet und der sich die beiden oberen Äste der Amplitudenkurve für die erzwungene Schwingung nähern, gleichzeitig Grenzkurve zwischen einem stabilen und einem instabilen Bereich sein muß. Auf einem ähnlichen Wege kann ein allgemein gültiges Gesetz für die Lage der Grenzkurve (c) gefunden werden. An der Stelle, an der die Amplitudenkurve in dem (φ, T)-Diagramm eine vertikale Tangente hat, muß sowohl die Bewegungsgleichung (2) als auch die Gleichung (3) eine rein periodische Lösung haben. Denn man kann in (3) die Unbekannte ($\varphi + \psi$) auch als auf der Amplitudenkurve liegende eng benachbarte Lösung von (2) auffassen. Daraus folgt, daß, gleichgültig wie die Hebelarmkurve verläuft, eine Grenzkurve durch die Punkte, für die die Amplitudenkurven lotrechte Tangenten haben, gehen muß.

Es ist also sicher, daß die Grenzkurve (b) für ein rein sinusförmiges Moment bei großen Winkeln tiefer liegt als in Diagramm Abb. 3. Und es ist damit nur erwiesen, daß, falls drei Lösungen der Bewegungsgleichung (2) möglich sind, die Lösung mit der mittleren Amplitude für alle Perioden instabil ist, bzw. daß ein ähnliches Gesetz auch gilt, wenn mehr als drei Lö-

sungen möglich sind. Es muß nun aber weiter gefolgert werden, daß die Grenzkurve (*a*) des Diagramms Abb. 3 auch für das rein sinusförmige erregende Moment existiert. Es ist ja auch schon bewiesen, daß sie für sehr kleine Perioden T ebenso liegen muß wie in dem Diagramm Abb. 3, und es liegt nahe, ihre Lage so anzunehmen, daß sie sich der nun etwas tiefer — nämlich auf der Skelettlinie — liegenden Grenzkurve (*b*) ebenso nähert wie in dem Diagramm Abb. 3 (Abb. 4). Es erscheint daher sicher, daß auch für ein rein sinusförmiges Moment der

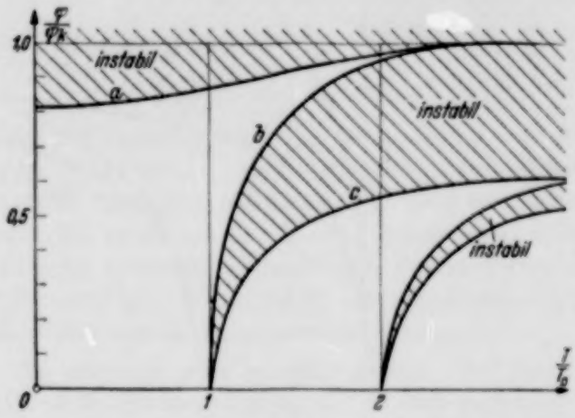

Abb. 4.

Abb. 5.

obere Ast der Amplitudenkurve für die erzwungene Schwingung nicht bei allen Perioden stabile Bewegungszustände erfaßt, und insbesondere, daß der instabile Bereich schon unterhalb des statischen Kenterwinkels φ_k einsetzt (Abb. 5). Damit erscheint das Problem als gelöst. Es wurden zwar nicht die genauen Lagen der Grenzkurven bestimmt, aber die Genauigkeit, mit der sie gezeichnet werden können, erscheint für das Beispiel des Schiffes ausreichend.

Die Lösung des Problems ist auch für eine beliebige andere Hebelarmkurve leicht zu finden. Zumeist ist an Stelle von (5) der Ansatz

$$h(\varphi) = a\varphi + b\varphi^3 - c\varphi^5$$

passender. Für die Lage der Grenzkurven (b) und (*c*) gelten die oben hierfür festgestellten Gesetze, und für die Grenzkurve (*a*) kann der Wert für $T = 0$ durch Annahme einer sinusför-

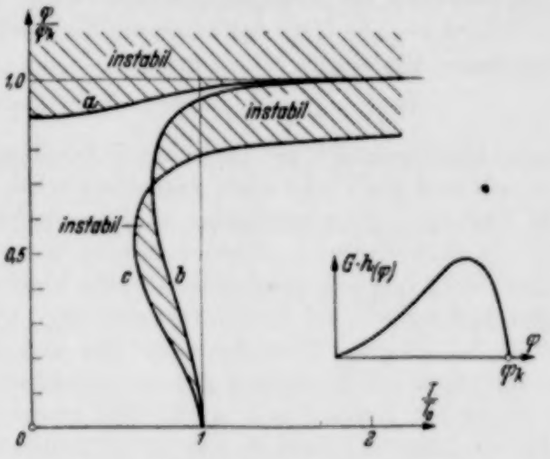

Abb. 6.

migen Schwingung $\overline{\varphi}\sin(\omega t)$ bestimmt werden. An Stelle der Differentialgleichung (4) erhält man

$$\Theta\ddot{\psi} + G\psi\left[a + \frac{3}{2}b\overline{\varphi}^2 - \frac{15}{8}c\overline{\varphi}^4 - \left(\frac{3}{2}b\overline{\varphi}^2 - \frac{5}{2}c\overline{\varphi}^4\right)\cos(2\omega t) - \frac{5}{8}c\overline{\varphi}^4\cos(4\omega t)\right] = 0,$$

und für $\omega = \infty$ erhält man die Lage der Grenzkurve (*a*) hiermit aus

$$a + \frac{3}{2}b\overline{\varphi}^2 - \frac{15}{8}c\overline{\varphi}^4 = 0.$$

Dieser Winkel ist, solange a positiv bleibt, immer kleiner als der statische Kenterwinkel φ_k, für den

$$a + b\varphi_k^2 - c\varphi_k^4 = 0$$

gilt (Abb. 6). Es beginnt also auch in diesem Fall der instabile Bereich unterhalb des statischen Kenterwinkels φ_k.

Einschränkend muß erwähnt werden, daß in der für die Stabilität der Bewegung maßgebenden, nicht linearen Differentialgleichung (4) bei den weiteren Untersuchungen nur die linearen Teile verwendet wurden. Diese Untersuchungen gelten daher streng genommen nur für sehr kleine Abweichungen von dem untersuchten Bewegungszustand. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß die gewonnenen Erkenntnisse durch diese Einschränkung nicht geschmälert werden.

(Eingegangen am 26. Juni 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *O. Grim*, Hamburg 1, Berlinertor 21.
Hamburgische Schiffbauversuchsanstalt

Zur Theorie der Vierpilzplatte.

Von W. Müller.

1. Einleitung. Die in einigen früheren Mitteilungen gegebene Darstellung [1] einiger Fälle von rechteckigen Platten soll im folgenden durch die Behandlung einer Platte ergänzt werden, die von vier paarweise symmetrisch zu den Mittellinien gelegenen Einzelkräften belastet bzw. gestützt wird. Wir wollen die so gekennzeichneten Fälle wegen der Verwandtschaft mit dem Pilzdeckenfall kurz unter der Bezeichnung Vierpilzplatte zusammenfassen [2]. Um die Untersuchung möglichst natürlich und systematisch durchzuführen, werden wir dabei von der Annahme rechteckiger Druck- bzw. Stützflächen und von der Darstellung der Durchbiegung durch Doppelreihen ausgehen, die nach *V. Lewe* [3] mit Hilfe der *Fourier*schen Methode ohne Schwierigkeiten aufgestellt werden können. Zur Weiterbehandlung dieser Reihen, also vor allem zum Zwecke der Umwandlung in einfache Reihen sollen zunächst einige allgemeine Reihenentwicklungen betrachtet werden, die auch für viele andere Fälle aus der Plattentheorie von Nutzen sind.

2. Einige für die Plattentheorie wichtige Reihenformeln. a) Wir gehen aus von zwei bei *A. Kneser* [4] vorkommenden, bereits an anderer Stelle herangezogenen Formeln.

a) Zunächst haben wir

$$\sum_{n\,=\,1,\,2,\,3\,\ldots} \frac{\cos n\,\gamma}{n^2+\omega^2} = \frac{\pi\,\mathfrak{Cof}\,\omega\,(\pi-\gamma)}{2\,\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\pi} - \frac{1}{2\,\omega^2} \qquad (0<\gamma<2\,\pi) \tag{1}$$

worin ω eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Differentiieren wir nach ω, so entsteht die weitere Formel

$$\sum_n \frac{\cos n\,\gamma}{(n^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi\,[\omega\,\pi\,\mathfrak{Cof}\,\omega\,\gamma + \mathfrak{Cof}\,\omega\,(\pi-\gamma)\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\pi + \omega\,\gamma\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\gamma\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,(\pi-\gamma)]}{4\,\omega^3\,\mathfrak{Sin}^2\,\omega\,\pi} - \frac{1}{2\,\omega^4}. \tag{2}$$

Zur Bestätigung führen wir den Grenzübergang $\omega \to 0$ durch, wozu die Benutzung der drei ersten Glieder in den Entwickelungen

$$\mathfrak{Sin}\,x = x\left(1+\frac{1}{6}\,x^2+\frac{1}{120}\,x^4+\cdots\right), \qquad \mathfrak{Cof}\,x = 1+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{24}\,x^4+\cdots \tag{3}$$

erforderlich ist, weil sich die Glieder mit ω^2 und ω^4 im Zähler aufheben. Es entsteht dann die bekannte *Fourier*sche Formel

$$\sum_n \frac{\cos n\,\gamma}{n^4} = \frac{1}{90}\,\pi^4 - \frac{1}{12}\,\pi^2\,\gamma^2 + \frac{1}{12}\,\pi\,\gamma^3 - \frac{1}{48}\,\gamma^4 \tag{4}$$

oder mit $\gamma = \pi\,\varrho$

$$\sum_n \frac{\cos n\,\pi\,\varrho}{n^4} = \pi^4\left(\frac{1}{90} - \frac{1}{12}\,\varrho^2 + \frac{1}{12}\,\varrho^3 - \frac{1}{48}\,\varrho^4\right). \tag{4a}$$

Durch Differentiation der Formel (2) nach γ resultiert dagegen

$$\sum \frac{n \sin n\,\gamma}{(n^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi\,[\gamma\,\mathfrak{Sin}\,a\,\pi\,\mathfrak{Cof}\,\omega\,(\pi-\gamma) - \pi\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\gamma]}{4\,\pi\,\mathfrak{Sin}^2\,\omega\,\pi}. \tag{5}$$

---

[1] *W. Müller*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 278; 21 (1953), S. 63; Österr. Ing.-Arch. 6 (1952), S. 404.
[2] *F. Tölke*, Ing.-Arch. 5 (1934), S. 187.
[3] *V. Lewe*, Bauingenieur 3 (1922), S. 314 u. 344; 4 (1923), S. 453.
[4] *A. Kneser*, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der math. Physik, S. 157 u. 167, Braunschweig 1922; vgl. auch *S. Iguchi*, Eine Lösung für die Berechnung biegsamer Platten, S. 15 u. 46 f., Berlin 1933.

Für den Grenzübergang $\omega \to 0$ braucht man die beiden ersten Glieder von (3) und erhält dann

$$\left.\begin{aligned} \sum_n{}' \frac{\sin n\gamma}{n^3} &= \frac{1}{12}\gamma(\pi-\gamma)(2\pi-\gamma) \\ \text{oder} \\ \sum_n{}' \frac{\sin n\pi\varrho}{n^3} &= \frac{1}{12}\pi^3\varrho(1-\varrho)(2-\varrho). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

b) Wenn nur über die ungerade Zahlenfolge summiert wird, geht man aus von der Grundformel

$$\sum_{n=1,3,5\ldots}{}' \frac{\cos n\gamma}{n^2+\omega^2} = \frac{\pi\,\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{4\,\omega\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi}{2}} \qquad (0<\gamma<\pi). \tag{7}$$

Differentiation nach ω liefert alsdann

$$\sum_{n=1,3,5}{}' \frac{\cos n\gamma}{(n^2+\omega^2)^2} = \frac{2\pi\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi}{2}\left[\omega\gamma\,\mathfrak{Cof}\,\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right]-\omega\pi^2\,\mathfrak{Cof}\,\omega\gamma}{16\,\omega^3\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\omega\pi}{2}}. \tag{8}$$

Weitere Differentiation nach γ gibt die Formel

$$\sum_{n=1,3,5}{}' \frac{n\sin n\gamma}{(n^2+\omega^2)^2} = \frac{2\pi\gamma\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+\pi^2\,\mathfrak{Sin}\,\omega\gamma}{16\,\omega\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\omega\pi}{2}}. \tag{9}$$

Für $\omega \to 0$ muß man in der Reihe (9) nur die ersten Glieder der Entwicklungen (3), in der Reihe (8) dagegen die beiden ersten Glieder benutzen. Dann ergibt sich durch eine leichte Rechnung

$$\sum_{n=1,3,5}{}' \frac{\cos n\pi\varrho}{n^4} - \frac{\pi^4}{96}(1-6\varrho^2+4\varrho^3) = \frac{\pi^4}{96}(1-2\varrho)(1+2\varrho-2\varrho^2). \tag{10}$$

$$\sum_{n=1,3,5}{}' \frac{\sin n\pi\varrho}{n^3} = \frac{\pi^3}{8}\varrho(1-\varrho). \tag{11}$$

c) Subtrahiert man nun zwei entsprechende, für die gesamte Zahlenfolge ($n = 1, 2, 3 \ldots$) und für die Folge der ungeraden Zahlen (1, 3, 5 . . .) gültigen Reihen, so ergeben sich weitere später zu verwendende Entwicklungen, bei denen n die gerade Zahlenfolge ($n = 2, 4, 6$ usw.) durchläuft. So hat man

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=2,4,\ldots}{}' \frac{\cos n\gamma}{(n^2+\omega^2)^2} \\ &= \pi\left[\frac{\omega\pi\,\mathfrak{Cof}\,\omega\gamma+2\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+2\omega\gamma\,\mathfrak{Sin}\,\omega\frac{\pi}{2}\,\mathfrak{Sin}\,a\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{16\,\omega^3\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\omega\pi}{2}}\right]-\frac{1}{2\,\omega^4}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\sum_{n=2,4,\ldots}{}' \frac{n\sin n\gamma}{(n^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi\left[2\gamma\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)-\pi\,\mathfrak{Sin}\,\omega\gamma\right]}{16\,\omega\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\omega\pi}{2}} \quad (0<\gamma<\pi). \tag{13}$$

Im besonderen wird

$$\sum_{n=2,4,6\ldots}{}' \frac{\sin n\pi\varrho}{n^3} = \frac{\pi^3}{24}\varrho(1-\varrho)(1-2\varrho), \tag{14}$$

$$\sum_{n=2,4,6\ldots}{}' \frac{\cos n\pi\varrho}{n^4} - \frac{\pi^4}{48}\left(\frac{1}{30}-\varrho^2+2\varrho^3-\varrho^4\right). \tag{15}$$

I. Die aufliegende Vierpilzplatte mit der Randbedingung $M=0$

3. Die Doppelreihe für die Durchbiegung der momentenfrei aufgelegten rechteckigen Vierpilzplatte. Wir setzen eine rechteckige Platte mit den Seitenlängen a und b voraus, die auf vier symmetrisch zu den Mittellinien und parallel zum Grundrechteck gelegenen Rechteckflächen mit den Seiten $2\alpha a$ und $2\beta a$ gleichmäßig belastet und an den Rändern so aufgelegt ist, daß w und die Momentensumme

$$M = -N\Delta w \qquad \left(N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\right) \tag{16}$$

verschwinden (Abb. 1). Die Koordinatenachsen x, y sollen mit zwei Rechteckseiten zusammenfallen und der Anfangspunkt in die linke untere Ecke des Rechtecks gelegt werden: die Mittelpunkte der Lastflächen mögen die Koordinaten x_0, y_0; $a-x_0, y_0$; $x_0, b-y_0$; $a-x_0; b-y_0$ haben. Machen wir für die Belastungsfunktion den Ansatz

$$p(x,y) = q\,f(x)\,g(y)\,, \tag{17}$$

wo $f(x)$ und $g(y)$ als Sinusreihen

$$f(x) = \sum_m A_m \sin\frac{m\pi x}{a}\,,$$

$$g(y) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{18}$$

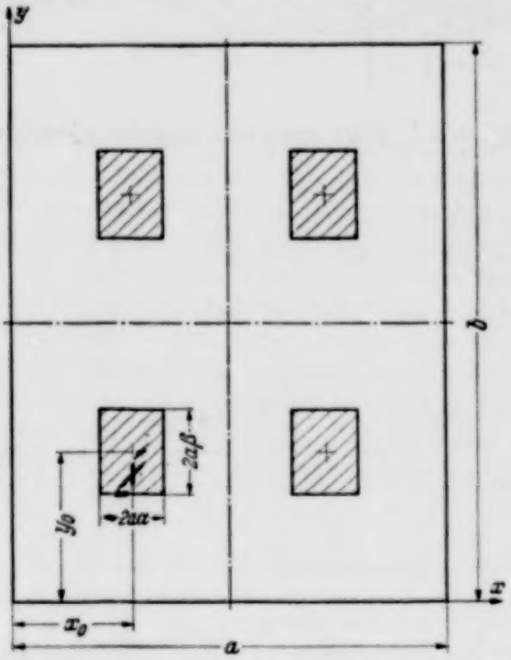

Abb. 1. Rechteckplatte mit vier rechteckigen Last- oder Stützflächen.

darstellbar sind, so ergeben sich die Koeffizienten A_m und B_n nach der *Fourier*schen Methode. Wenn berücksichtigt wird, daß f und g innerhalb der Druckfläche gleich Eins und außerhalb gleich Null sind, so erhält man mit Einführung von $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$, $\lambda = \frac{b}{a}$

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin m\pi\frac{x}{a}\,dx = \frac{2}{m\pi}\left[\cos\frac{m\pi x}{a}\right]_{x_0+a\alpha}^{x_0-a\alpha} + \frac{2}{m\pi}\left[\cos\frac{m\pi x}{a}\right]_{a-x_0+a\alpha}^{a-x_0-a\alpha} \\ &= \frac{4}{m\pi}(1-\cos m\pi)\sin m\pi\alpha\sin m\pi\xi_0\,; \\ B_n &= \frac{4}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Man sieht daher, daß die Koeffizienten mit geradem Zeiger m oder n verschwinden, oder es wird

$$A_m = \frac{8}{m\pi}\sin m\pi\alpha\sin m\pi\xi_0\,, \qquad B_n = \frac{8}{n\pi}\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda} \qquad (m,n=1,3,5\ldots)\,. \tag{20}$$

Man erhält also für die Druckfunktion die Doppelreihe

$$p(xy) = \frac{64\,q}{\pi^2}\sum_m\sum_n\frac{1}{m\,n}\sin m\pi\alpha\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta}{\lambda} \tag{21}$$

$$(m,n=1,3,5\ldots)$$

Benutzt man ferner die Differentialgleichung für die Durchbiegung w

$$N\Delta\Delta w = p\,,$$

so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für die elastische Fläche die Doppelreihe

$$w = \frac{64\,q\,b^4}{N\pi^6}\sum_m\sum_n\frac{\sin m\pi\alpha\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{m\,n\,(n^2+m^2\lambda^2)^2} \tag{22}$$

$$(m,n=1,3,5\ldots)\,,$$

die in dem m der Folge vorausgesetzten Fall konzentrierter Punktbelastung in

$$w = \frac{16\,P\lambda^3 a^2}{N\pi^4}\sum_m\sum_n\frac{\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{(n^2+m^2\lambda^2)^2} \tag{23}$$

übergeht. Ohne uns auf die vielen in (22) und (23) enthaltenden Sonderfälle einzulassen, bemerken wir nur, daß, wenn Überdeckungen der Druckflächen vermieden werden sollen, folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$$0<\alpha<\frac{1}{4}, \qquad 0<\frac{\beta}{\lambda}<\frac{1}{4}, \qquad \alpha+\xi_0\leq\frac{1}{2}, \qquad \beta+\eta_0\leq\frac{\lambda}{2}.$$

Wenn $\alpha=\xi_0=\beta/\lambda=\eta_0/\lambda=1/4$ wird, so erhält man den *Navier*schen Fall der vollbelasteten Platte.

4. Darstellung von w durch eine einfache Reihe. Mit Hilfe der in Ziff. 2 gegebenen Reihe (8) kann man nun ohne Schwierigkeit etwa die auf den Zeiger n sich beziehende η-Reihe summieren, wenn man zunächst unter der Voraussetzung $\eta<\eta_0$ für das Produkt der sin-Funktionen die halbe Differenz zweier cos-Funktionen einsetzt, also

$$\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\sin n\pi\frac{\eta}{\lambda}=\frac{1}{2}\left(\cos n\pi\frac{\eta_0-\eta}{\lambda}-\cos n\pi\frac{\eta_0+\eta}{\lambda}\right)$$

schreibt und ω durch $m\lambda$, ferner ϱ durch $(\eta_0-\eta)/\lambda$ bzw. $(\eta_0+\eta)/\lambda$ ersetzt. Es ergibt sich dann im Gebiete I $(0<\eta<\eta_0)$ folgende Reihendarstellung von w:

$$w_{\mathrm{I}}=\frac{P a^2}{N\pi^3}\sum_{m=1,3,5}\frac{\sin m\pi\xi_0\sin m\pi\xi}{m^3\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\frac{\lambda}{2}}\left[\frac{m\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta}{\mathfrak{Cof}\,m\pi\frac{\lambda}{2}}\right.$$
$$+2\,m\pi\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)$$
$$\left.+2\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)(\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta-m\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta)\right]. \tag{24}$$

Die Durchbiegung w_{II} im Gebiet II $(\eta_0\leq\eta\leq\lambda-\eta_0)$ folgt aus dem Ausdruck (24) durch Vertauschung von η und η_0, während w_{III} im Gebiet III $(\lambda-\eta_0\leq\eta<\lambda)$ aus w_{I} durch Ersetzung von η durch $\lambda-\eta$ hervorgeht (vgl. Abb. 2). An den Übergangsstellen verhalten sich, wie man leicht zeigen kann, w und die erste Ableitung von w stetig.

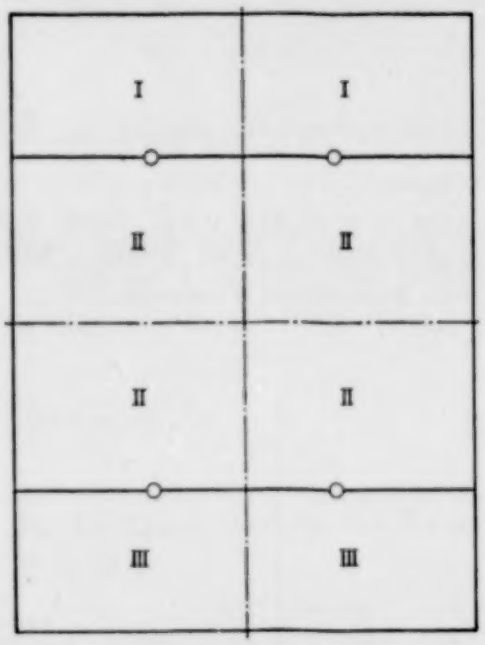

Abb. 2. Gebietseinteilung für die Berechnung der Vierpilzplatte mit Punktlasten oder Punktstützen.

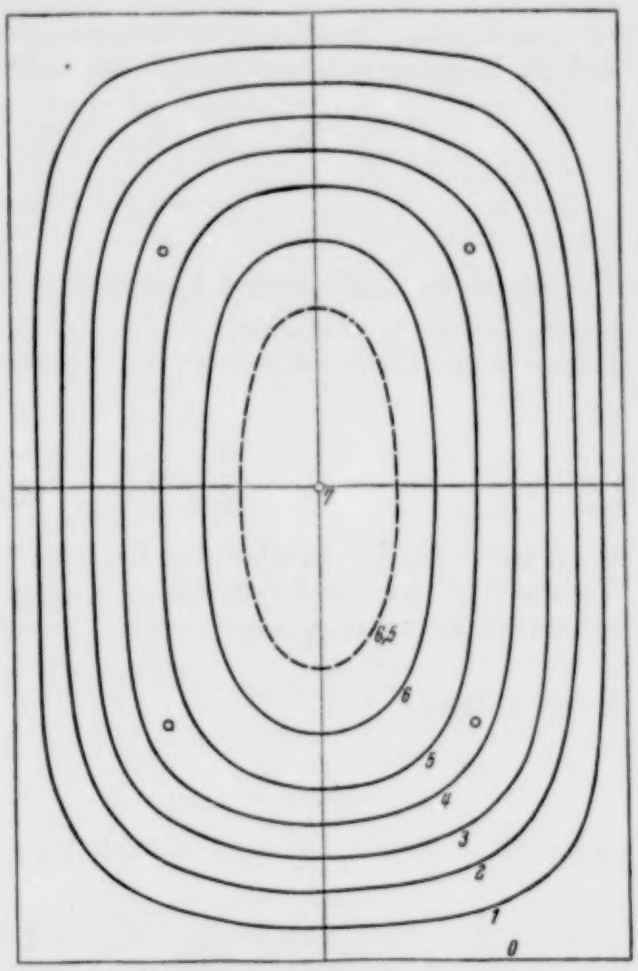

Abb. 3. Höhenlinien der Biegefläche einer aufgelegten Vierlastplatte ($\lambda=1{,}5$, $\xi_0=1/3$, $\eta_0=1/2$).

Natürlich ist es auch möglich, die Reihe (24) auf dem Wege der Überlagerung aus der früher behandelten Einpilzplatte herzuleiten, wenn man als Lastpunkte die Punkte $x_0\,y_0$; $a-x_0\,,y_0$; $x_0\,,b-y_0$; $a-x_0\,,b-y_0$ zugrundelegt.

In Abb. 3 haben wir die Höhenlinien der Biegefläche für den Fall einer Platte aufgezeichnet, deren maßgebende Konstanten die Werte $\xi_0=1/3$, $\eta_0=1/2$, $\lambda=1{,}5$ haben. Man erkennt hier wieder, daß die Lastpunkte für die elastische Fläche keine singulären Stellen sind.

Wenn man den *Navier*schen Fall der gleichmäßig belasteten Platte mit dem vorliegenden Fall verbindet und gleichzeitig die Punktlasten umkehrt, also als Stützkräfte einführt, so erhält man die momentenfrei aufliegende belastete und gestützte Vierpilzplatte. Die Durchbiegung im *Navier*schen Fall läßt sich aber folgendermaßen als einfache Reihe darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \overline{w} = \frac{2\,p_0\,a^4}{N\,\pi^5} \sum_{m=1,\,3,\,5\,\ldots} \frac{\sin m\,\pi\,\xi}{m^5\,\mathfrak{Cof}\,m\,\pi\,\frac{\lambda}{2}} \Bigg[& 2\,\mathfrak{Cof}\,m\,\pi\,\frac{\lambda}{2} - 2\,\mathfrak{Cof}\,m\,\pi\left(\eta - \frac{\lambda}{2}\right) \\ & - \frac{m\,\pi\,\lambda}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,m\,\pi\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,m\,\pi\,\frac{\lambda}{2}} + m\,\pi\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,m\,\pi\left(\eta - \frac{\lambda}{2}\right)\Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Bei gleichzeitiger Punktstützung erhält man also die Durchbiegung im Gebiet I in der Form

$$(w_r)_{\mathrm{I}} = \overline{w} - w_{\mathrm{I}}\,.$$

5. Berechnung der Momente für die Vierpilzplatte. Die Biegungsmomente m_x und m_y und das Drillungsmoment m_{xy} lassen sich, wie bekannt, in der Form darstellen

$$m_x = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad m_y = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad m_{xy} = -(1-\nu)\,N\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,, \tag{26}$$

wenn man unter ν die *Poisson*sche Konstante versteht. Sehr einfach gestaltet sich die Berechnung der mit $1+\nu$ dividierten Momentensumme. Es ergibt sich der Ausdruck

$$M = \frac{m_x + m_y}{1+\nu} = \frac{4\,P}{\pi} \sum_{m=1,\,3,\,5\,\ldots} \frac{\sin m\,\pi\,\xi_0 \sin m\,\pi\,\xi\;\mathfrak{Cof}\,m\,\pi\left(\frac{\lambda}{2} - \eta_0\right)\mathfrak{Sin}\,m\,\pi\,\eta}{m\,\mathfrak{Cof}\,\frac{m\,\pi\,\lambda}{2}}\,, \tag{27}$$

in dem allerdings zunächst die Singularitäten verdeckt erscheinen. Es läßt sich dann zeigen, daß die Biegungsmomente auch in folgender Weise aus dem Moment ableitbar sind [1]:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{1+\nu}{2}\,M - \frac{1}{2}\,(1-\nu)\left(\eta\,\frac{\partial M}{\partial \eta} + \eta_0\,\frac{\partial M}{\partial \eta_0} + \lambda\,\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right). \\ m_y &= \frac{1+\nu}{2}\,M + \frac{1}{2}\,(1-\nu)\left(\eta\,\frac{\partial M}{\partial \eta} + \eta_0\,\frac{\partial M}{\partial \eta_0} + \lambda\,\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Um das Moment M durch ϑ-Funktionen darzustellen, führen wir die komplexe und die konjugiert komplexe Variable $\zeta = \xi + i\,\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\,\eta$ ein und gehen aus von dem Fall der Einlastplatte, für den folgender Ausdruck gefunden wurde [2]:

$$M_1 = \frac{P}{2\,\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + \zeta_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{2}\right)}\,. \tag{29}$$

wenn unter $\Re_e$ der Realteil des Logarithmus des ϑ-Quotienten verstanden wird. Nach der Vorschrift dieses Ausdrucks findet man dann auch die von den drei anderen Kräften herrührenden Momente, wenn man statt ζ_0 nach der Reihe folgende Koordinaten einsetzt:

$$1 - \bar{\zeta}_0\,, \qquad \bar{\zeta}_0 + i\,\lambda\,, \qquad 1 + i\,\lambda - \zeta_0\,.$$

Es wird dann

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= \frac{P}{2\,\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + 1 - \zeta_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - 1 + \zeta_0}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + 1 - \bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - 1 + \bar{\zeta}_0}{2}\right)}\,, \\ M_3 &= \frac{P}{2\,\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + \zeta_0 - i\,\lambda}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \zeta_0 + i\,\lambda}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}_0 + i\,\lambda}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}_0 - i\,\lambda}{2}\right)}\,, \\ M_4 &= \frac{P}{2\,\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + 1 - \bar{\zeta}_0 - i\,\lambda}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - 1 + \bar{\zeta}_0 + i\,\lambda}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\zeta + 1 - \zeta_0 + i\,\lambda}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta - 1 + \zeta_0 - i\,\lambda}{2}\right)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

[1] Vgl. *A. Nadai*, Elastische Platten, S. 86, Berlin 1925; *K. Grein*, Pilzdecken, S. 37, Berlin 1948.
[2] Vgl. *W. Müller*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 64.

Wendet man nun folgende, aus der Theorie der ϑ-Funktionen bekannten Transformationsformeln [1] an:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1\left(v \pm \frac{1}{2}\right) &= \pm\, \vartheta_2(v)\,, \\
\vartheta_1\left(v \pm \frac{i\lambda}{2}\right) &= \pm\, i\, q^{-1/4}\, e^{\mp i\pi v}\, \vartheta_0(v)\,, \\
\vartheta_1\left(v \pm \frac{1}{2} + i\frac{\lambda}{2}\right) &= \pm\, q^{-1/4}\, e^{-i\pi v}\, \vartheta_3(v)\,, \\
\vartheta_1\left(v \pm \frac{1}{2} - i\frac{\lambda}{2}\right) &= \pm\, q^{-1/4}\, e^{i\pi v}\, \vartheta_3(v)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

so heben sich, wie man sieht, die Glieder außerhalb der Logarithmen heraus, und die Momente stellen sich dann übersichtlich dar als Logarithmen von Quotienten der vier Funktionen $\vartheta_0\,\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$:

$$\left.\begin{aligned}
M_2 &= \frac{P}{2\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_2\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)\vartheta_2\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_2\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)}\,, \\
M_3 &= \frac{P}{2\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_0\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2}\right)}\,, \\
M_4 &= \frac{P}{2\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_3\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Im Ganzen läßt sich das Moment bei der Vierpilzplatte in die Form

$$M = \frac{P}{2\pi}\,\Re_e \ln \frac{\vartheta_0\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)\vartheta_2\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)\vartheta_2\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_2\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_2\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)} \tag{33}$$

setzen. Durch Anwendung der Beziehung

$$\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v) = \frac{1}{2\pi}\,\vartheta_1(2v)\,\vartheta_1'(0) \tag{34}$$

kann man den Ausdruck noch etwas umgestalten.

Um die Absolutbeträge zahlenmäßig zu berechnen, setzen wir

$$\xi + \xi_0 = r_1\,, \quad \xi - \xi_0 = r_2\,, \quad \eta + \eta_0 = s_1\,, \quad \eta - \eta_0 = s_2\,,$$
$$v_1 = \frac{r_1 + i\,s_1}{2}\,, \quad v_2 = \frac{r_2 + i\,s_2}{2}\,, \quad v_3 = \frac{r_1 + i\,s_2}{2}\,, \quad v_4 = \frac{r_2 + i\,s_1}{2}\,.$$

Dann wird

$$\frac{\zeta+\zeta_0}{2} = v_1\,, \quad \frac{\zeta-\zeta_0}{2} = v_2\,, \quad \frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2} = v_3\,, \quad \frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2} = v_4\,.$$

Für die Absolutbeträge der ϑ-Funktionen benutzt man folgende, früher abgeleiteten Näherungsformeln [2]:

$$\left.\begin{aligned}
|\vartheta_1(v)|^2 &\approx 4\,q^{1/2}\,(\mathfrak{Cof}\,\pi s - \cos\pi r)\left(\frac{1}{2} - q^2 - 2\,q^2\cos\pi r\,\mathfrak{Cof}\,\pi s\right), \\
|\vartheta_2(v)|^2 &\approx 4\,q^{1/2}\,(\mathfrak{Cof}\,\pi s + \cos\pi r)\left(\frac{1}{2} - q^2 + 2\,q^2\cos\pi r\,\mathfrak{Cof}\,\pi s\right), \\
|\vartheta_0(v)|^2 &\approx 1 - 4\,q\cos\pi r\,\mathfrak{Cof}\,\pi s + 2\,q^2\,(\cos 2\pi r + \mathfrak{Cof}\,2\pi s)\,, \\
|\vartheta_3(v)|^2 &\approx 1 + 4\,q\cos\pi r\,\mathfrak{Cof}\,\pi s + 2\,q^2\,(\cos 2\pi r + \mathfrak{Cof}\,2\pi s)\,,
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

[1] Vgl. *G. H. Halphen*, Traité des fonctions elliptiques, Bd. I, S. 254, Paris 1886—91; ferner *F. Tricomi*, Elliptische Funktionen, S. 156, Leipzig 1948.

[2] *W. Müller*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 65, 66.

wo noch die Werte $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ und die entsprechenden Indizes der Größen r und s einzusetzen sind und in unserem Falle ($\lambda = 1{,}5$) die auftretenden Konstanten folgende Werte annehmen:

$$q = e^{-\pi\lambda} = 0{,}00898\,, \quad 4\,q^{1/2} = 0{,}3791\,, \quad 4\,q = 0{,}0359\,, \quad 2\,q^2 = 0{,}0001614\,.$$

Mit Hilfe dieser Formeln haben wir nun die Absolutbeträge der vier ϑ-Funktionen für vierzig Argumente ($\xi = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}2$ bis $0{,}5\,i\,\eta$ u. 0 bis 0,75) und danach die Momentenbeiwerte $c_m = M\,2\,\pi/P$ berechnet. Um den Vergleich mit der Einlastplatte, deren Lastpunkt im Mittelpunkt liegt, durchzuführen, haben wir die mit 4 dividierten c_m-Werte mit den entsprechenden c_m-Werten der Einpilzplatte in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt.

Tabelle 1. *c_m-Werte der momentenfrei aufgelegten Vierpilzplatte.*

ξ \ η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75
0,1	0,175	0,355	0,537	0,755	0,903	0,996	0,895	0,888
0,2	0,315	0,601	1,038	1,502	1,832	1,746	1,534	1,450
0,3	0,555	0,946	1,550	2,477	3,233	3,008	2,495	2,459
0,4	0 586	1 075	1 788	2 665	3,536	3,159	2,897	2,824
0,5	0,599	1,052	1,689	2,342	2,805	2,888	2,857	2,847

Tabelle 2.
c_m-Werte der in der Mitte belasteten Einlastplatte zum Vergleich mit der gleichbelasteten Vierlastplatte.

ξ \ η	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75
0,1	0,146	0,304	0,481	0,737	0,898	1,102	1,222	1,238
0,2	0,250	0,586	0,934	1,348	1,810	2,262	2,580	2,614
0,3	0,398	0,826	1,313	2,110	2,678	4,480	4,276	4,380
0,4	0,464	0,836	1,585	2,558	3,431	4,823	6,774	7,252
0,5	0,490	1,034	1,681	2,816	3,749	5,702	10,061	∞

Die Abb. 4 und 5 geben ferner die Veranschaulichung der Momentenverteilung, bzw. die Höhenlinien der Momentenflächen bei der Vierlastplatte und der Einlastplatte. Die Zuordnung der mit Zahlen versehenen M-Linien zu den Werten der Momentenbeiwerte ist derart, daß der Linie n dem Werte $c_m = n \cdot 0{,}3$ entspricht.

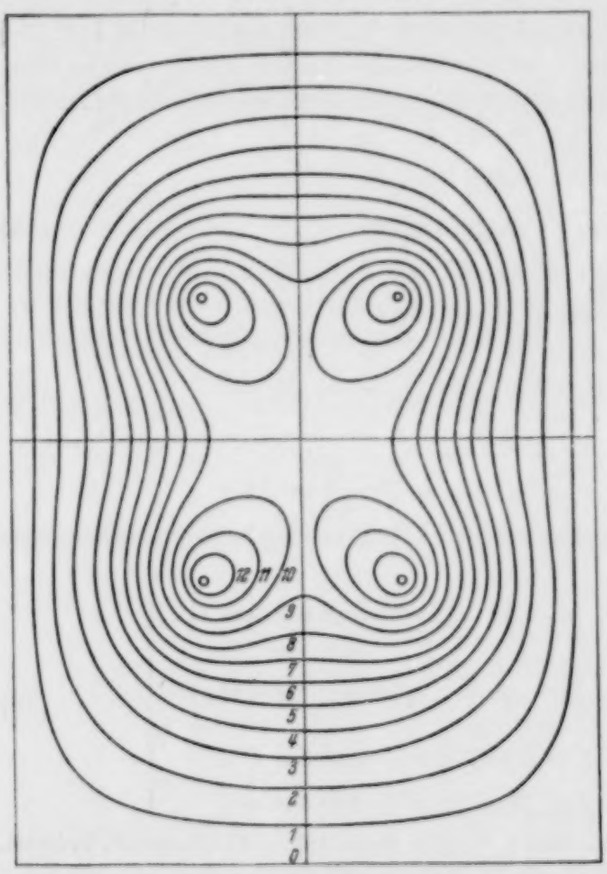

Abb. 4. Höhenlinien der Momentenfläche einer aufliegenden Vierlastplatte ($\lambda = 1{,}5,\ \xi_0 = 1/3,\ \eta_0 = 1/2$).

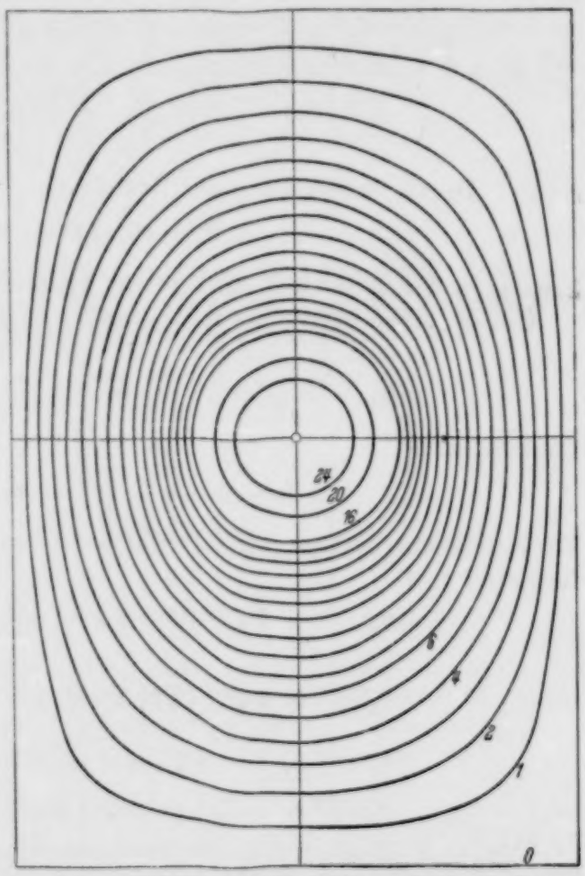

Abb. 5. Höhenlinien der Momentenfläche der Einlastplatte ($\lambda = 1{,}5,\ \xi_0 = 1/2,\ \eta_0 = 1/2$).

II. Die querkraftfrei eingespannte Vierpilzplatte.

6. Die *Lewe*sche Ausgangsreihe. Bei querkraftfrier Einspannung, die z. B. den Bedingungen

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \tag{36}$$

an den Rändern $x\varphi = 0$ und $x = a$ entspricht, können in den Reihenentwicklungen nur die Funktionen $\cos n\pi\zeta$ und $\cos n\pi\eta/\lambda$ auftreten. Wenn wir eine gleichmäßige Belastung p_0 je Flächeneinheit und vier Pilzstützen mit rechteckigen Stützflächen bei der Stützkraft q voraussetzen, so können wir die Belastungsfunktion $p(x\,y)$ den Ansatz machen

$$\left.\begin{aligned} &p(x\,y) = p_0 - q\,f(x)\,g(y) \\ \text{mit}\quad &f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_m A_m \cos m\pi\frac{x}{a}\,, \qquad g(y) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_n B_n \cos n\pi\frac{y}{b}\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Dann erhalten wir nach der *Fourier*schen Methode folgende Werte der Koeffizienten:

$$A_0 = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,dx = 8\alpha\,, \qquad B_0 = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\,dy = 8\frac{\beta}{\lambda}\,,$$

$$A_m = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos m\pi\frac{x}{a}\,dx = \frac{2}{m\pi}\left[\sin m\pi\frac{x}{a}\right]_{x_0-a\alpha}^{x_0+a\alpha} + \frac{2}{m\pi}\left[\sin m\pi\frac{x}{a}\right]_{a-x_0-a\alpha}^{a-x_0+a\alpha}$$

$$= \frac{4}{m\pi}(1+\cos m\pi)\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0 = \frac{4}{m\pi}[1+(-1)^m]\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\,,$$

$$B_n = \frac{4}{n\pi}[1+(-1)^n]\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\,.$$

Man sieht daher, daß in diesem Falle die Glieder mit ungeraden m bzw. n verschwinden, und daß für gerade m oder n die Koeffizienten die Werte

$$A_m = \frac{8}{m\pi}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\,, \qquad B_n = \frac{8}{n\pi}\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda} \qquad (m\,,\,n = 2,4,6\ldots) \tag{38}$$

erhalten. Damit wird aber

$$f(\xi) = 4\alpha + \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{m=2,4,6\ldots}\frac{1}{m}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi\,;$$

$$g(\eta) = 4\frac{\beta}{\lambda} + \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=2,4,6\ldots}\frac{1}{n}\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\,,$$

und die Lastfunktion erhält die Form

$$\left.\begin{aligned} p(\xi\,\eta) = -2\,p_0\Bigg(&\frac{1}{\pi\alpha}\sum_m\frac{1}{m}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi \\ &+\frac{\lambda}{\pi\beta}\sum\frac{1}{n}\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda} \\ &+\frac{2\lambda}{\alpha\beta\pi^2}\sum_m\sum_n\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\Bigg)\,, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

wenn wir als Gleichgewichtsbedingung

$$16\,q\,\alpha\,\beta\,a^2 = p_0\,a\,b \qquad \text{oder} \qquad 16\,q\,\alpha\,\beta = p_0\,\lambda$$

berücksichtigen. Wenn die Stützflächen unendlich klein werden, so geht die Belastungs-

funktion über in

$$p(\xi\,\eta) = -\,2\,p_0\Big(\sum_m \cos m\pi\,\xi_0 \cos m\pi\,\xi + \sum_n \cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda} + 2\sum_m\sum_n \cos m\pi\,\xi_0 \cos m\pi\xi \cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\Big) \quad (m\,,\,n = 2,\,4,\,6\,\ldots)\,. \tag{40}$$

Macht man für w einen entsprechenden Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten, so erhält man durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Vergleich beider Seiten für w eine Summe zweier einfacher und einer Doppelreihe. Nach Hinzufügung einer Konstanten hat man also

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 - \frac{2\,p_0\,a^4}{N\pi^4}\Bigg[&\sum_m \frac{1}{m^4}\cos m\pi\,\xi_0 \cos m\pi\,\xi + \sum_n \frac{\lambda^4}{n^4}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda} \\ &+ 2\,\lambda^4\sum_m\sum_n \frac{\cos m\pi\,\xi_0 \cos m\pi\,\xi\,\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{(n^2+m^2\lambda^2)^2}\Bigg]\,(m\,,\,n = 2,\,4,\,6\,\ldots)\,, \\ &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

7. Umformung der Reihen. Die Doppelreihe können wir zunächst auf eine einfache Reihe reduzieren, indem wir etwa die auf den Index n und die Variable η sich beziehende Reihe summieren mit Hilfe der unter (8) angegebenen Formel. Setzen wir nämlich unter der Voraussetzung $\eta < \eta_0$

$$\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\cos n\pi\frac{\eta_0-\eta}{\lambda} + \cos n\pi\frac{\eta_0+\eta}{\lambda}\right),$$

so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\frac{n\pi\eta_0}{\lambda}\cos\frac{n\pi\eta}{\lambda}}{(n^2+m^2\lambda^2)^2} = \sum_{m=2,\,4,\,6\,\ldots} \frac{\pi}{8\,(m\lambda)^3\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\frac{\lambda}{2}}\Bigg[&\frac{\frac{1}{2}\,m\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta}{\mathfrak{Sin}\,m\pi\frac{\lambda}{2}} \\ &+ \mathfrak{Cof}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)(\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta - m\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta) \\ &+ m\pi\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\Bigg] - \frac{1}{2\,(m\lambda)^4}\,. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Das letzte von η unabhängige Glied auf der rechten Seite führt nun, wie man erkennt, wieder zu der Reihe $-\,w_1$, die sich daher mit der ersten Reihe unserer Summe aufhebt. Damit bleibt aber außer der Konstanten nur die Summe einer einfachen, nur η enthaltenden und einer beide Variablen enthaltenden einfachen Reihe übrig. Wenden wir aber auf die erste Reihe w_2 die Formel (15) an, so ergibt sich

$$\sum_{n=2,\,4,\,6\,\ldots} \frac{\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{n^4} = \frac{\pi^4}{48}\left[\frac{1}{30} - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\eta_0}{\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{\eta_0}{\lambda}\right)^3 + 6\,\frac{\eta_0}{\lambda}\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^4 - \left(\frac{\eta_0}{\lambda}\right)^4 - 6\left(\frac{\eta_0}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2\right] \tag{43}$$

und daher insgesamt für die Durchbiegung, wenn wir noch statt m die Zahl $2\,n$ einführen,

wobei dann n die ganze Zahlenreihe 1, 2, 3 usw. durchläuft,

$$\left.\begin{aligned} w_{\mathrm{I}} = w_0 + \frac{p_0\, a^4}{24\, N}[\eta^4 + \lambda^2\eta^2 - 6\,\eta_0\,(\lambda-\eta_0)\,\eta^2 + \eta_0^2(\lambda-\eta_0)^2] \\ - \frac{p_0\, a^3\, b}{16\, N} \sum_{n=1,\,2,\,3\,\ldots} \frac{\cos 2n\pi\xi_0 \cos 2n\pi\xi}{(n\pi)^3\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda}\Big[\frac{n\pi\lambda\, \mathfrak{Cof}\, 2n\pi\eta_0\, \mathfrak{Cof}\, 2n\pi\eta}{\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda} \\ + \mathfrak{Cof}\, n\pi(\lambda - 2\eta_0)\,(\mathfrak{Cof}\, 2n\pi\eta - 2n\pi\eta\, \mathfrak{Sin}\, 2n\pi\eta) \\ + 2n\pi\eta_0\, \mathfrak{Sin}\, 2n\pi\Big(\frac{\lambda}{2} - \eta_0\Big)\mathfrak{Cof}\, 2n\pi\eta\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Aus der im Gebiet I gültigen Funktion w_{I} ergeben sich die Ausdrücke für w_{II} im Gebiet II, bzw. der Ausdruck für w_{III} im Gebiet III nach der oben angegebenen Regel durch Vertauschung von η und η_0, bzw. durch Ersetzung von η durch $\lambda - \eta$.

Abb. 6 gibt eine Veranschaulichung der Höhenlinien der nach (44) berechneten Biegefläche für den Fall $\lambda = 1{,}5$, $\xi_0 = 1/3$, $\eta_0 = 1/2$. Die Stützpunkte treten als singuläre Stellen für die Anschauung nicht hervor; erst in den zweiten Ableitungen von w macht sich die Singularität bemerkbar.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß w_2 ein partikuläres Integral unserer Gleichung darstellt, nämlich die Durchbiegung eines Plattenstreifens von der Breite b, der in der x-Richtung unendlich lang ist. Dieselbe Form erhält man, wenn man nach der elementaren Balkentheorie die elastische Linie eines gleichmäßig belasteten Balkens von der Länge b berechnet, der durch zwei, um y_0 von beiden Enden abstehenden Auflagern gestützt und an den Enden (durch die angrenzenden Teile) so eingespannt wird, daß die Tangenten hier horizontal bleiben (vgl. Abb. 7). Die beiderseitigen Einspannungsmomente erhält man auch aus der allgemeinen Momentensumme, für die sich aus (44) folgender Ausdruck herleitet:

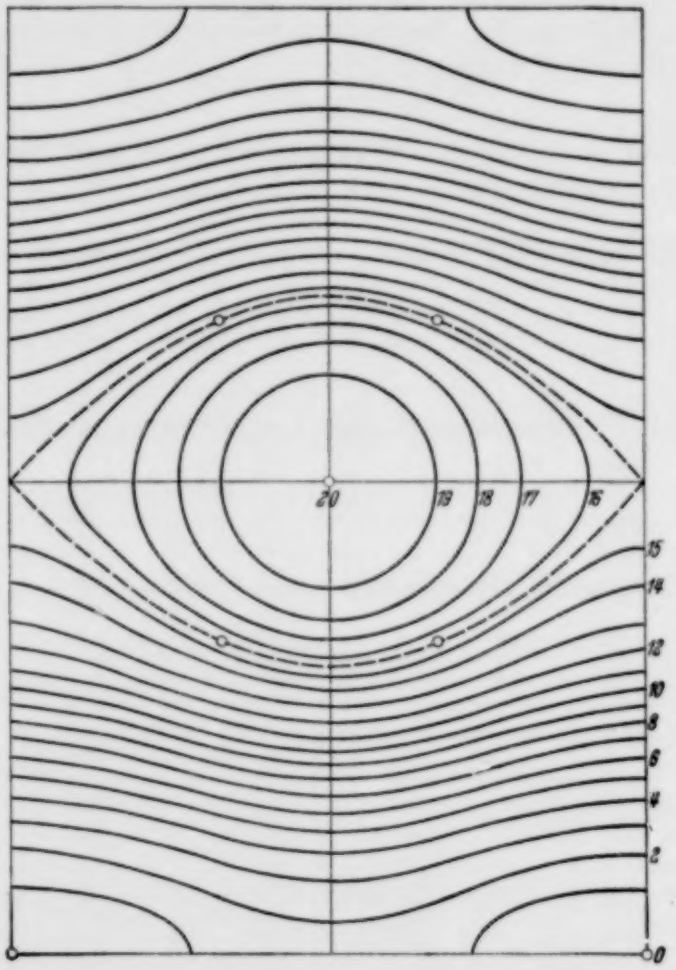

Abb. 6. Höhenlinien der Biegefläche der querkraftfrei eingespannten Vierpilzplatte ($\lambda = 1{,}5$, $\xi_0 = 1/3$, $\eta_0 = 1/2$).

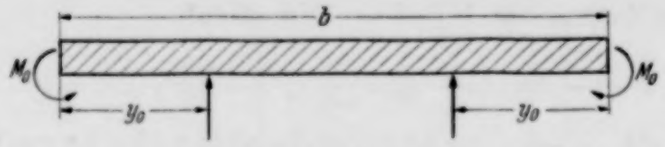

Abb. 7. Plattenstreifen von der Breite b, gleichmäßig belastet, symmetrisch gestützt und an den Enden eingespannt (Partikularlösung w_1).

$$M_1 = \frac{1}{2} p_0 a^2 \frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{\pi}{2\lambda}\left(2\lambda\eta_0 - \frac{1}{3}\lambda^2 - 2\eta^2 - 2\eta^2\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1,2,3\ldots} \frac{\cos 2n\pi\xi_0 \cos 2n\pi\xi \operatorname{Cof} 2n\pi\left(\frac{\lambda}{2} - \eta^0\right) \operatorname{Cof} 2n\pi\eta}{n \operatorname{Sin} n\pi\lambda}\right], \tag{45}$$

entsprechend für die Gebiete II und III nach der oben ausgesprochenen Regel. Setzt man im ersten Teil auf der rechten Seite $\eta = 0$, so kommt als Einspannungsmoment der Wert

$$M_0 = \frac{1}{2} p_0 a^2\left(\lambda\eta_0 - \eta_0^2 - \frac{1}{6}\lambda^2\right) = \frac{p_0}{2}\left[y_0(b - y_0) - \frac{1}{6} b^2\right]. \tag{46}$$

Eine gewisse Bestätigung der Rechnung gibt die Herleitung des Falles $\xi_0 = \eta_0/\lambda = 1/2$, bei dem die vier Stützen in der Mitte des Rechtecks zusammenfallen. Wir erhalten dann

$$\left.\begin{aligned} w &= w_0 + \frac{p_0}{24 N}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right]^2 - \frac{p a^3 b}{16 N}\sum_n \frac{(-1)^n \cos 2n\pi\xi}{(\pi n)^3 \operatorname{Sin} n\pi\lambda} \\ &\quad \times [\operatorname{Cof} 2n\pi\eta\,(1 + n\pi\lambda \operatorname{Cof}\operatorname{tg} n\pi\lambda) - 2n\pi\eta \operatorname{Sin} 2n\pi\eta], \\ M &= \frac{1}{2} p_0 a^2 \frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{\pi}{2\lambda}\left(\frac{1}{6}\lambda^2 - 2\eta^2\right) - \sum_n \frac{(-1)^n \cos 2n\pi\xi \operatorname{Cof} 2n\pi\eta}{n \operatorname{Sin} n\pi\lambda}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Das ist der an anderer Stelle behandelte Fall einer durchlaufenden Pilzdecke mit einem regelmäßigen Gitter von Stützkräften. Die Formeln gehen in die früher gegebenen Formeln über, wenn man a und b durch $2a$ und $2b$ ersetzt. 1.

8. Darstellung des Momentes durch ϑ-Funktionen. Um den Ausdruck für das Moment umzuformen, gehen wir aus von der identischen Gleichung

$$\cos 2n\pi\xi_0 \cos 2n\pi\xi \operatorname{Cof} 2n\pi\eta \operatorname{Cof} 2n\pi\left(\frac{\lambda}{2} - \eta_0\right) = \frac{1}{4}\Re_e\left[\cos 2n\pi\left(\zeta - \zeta_0 + i\frac{\lambda}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \cos 2n\pi\left(\zeta + \zeta_0 - i\frac{\lambda}{2}\right) + \cos 2n\pi\left(\zeta - \bar{\zeta}_0 - i\frac{\lambda}{2}\right) + \cos 2n\pi\left(\zeta - \bar{\zeta}_0 + i\frac{\lambda}{2}\right)\right].$$

Benutzen wir ferner die Reihenbeziehung für den Logarithmus der ϑ_0-Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{n \operatorname{Sin} n\pi\lambda} = \ln \Pi(1 - q^{2n}) - \ln \vartheta_0(v), \tag{49}$$

so erhalten wir für das Moment die Darstellung

$$M = \frac{1}{2}\frac{p a^2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2\lambda}\left(2\lambda\eta_0 - 2\eta^2 - 2\eta_0^2 - \frac{1}{3}\lambda^2\right) - \ln \Pi(1 - q^{2n})\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\Re_e \ln \vartheta_0\left(\zeta - \zeta_0 + i\frac{\lambda}{2}\right)\vartheta_0\left(\zeta + \zeta_0 - i\frac{\lambda}{2}\right)\vartheta_0\left(\zeta - \bar{\zeta}_0 - i\frac{\lambda}{2}\right)\vartheta_0\left(\zeta + \bar{\zeta}_0 + i\frac{\lambda}{2}\right)\right].$$

Nun besteht aber die weitere Relation

$$\Re e \ln \vartheta_0\left(v \mp \frac{1}{2} i\lambda\right) = \ln q^{-1/4} \mp \pi v_2 + \Re_e \ln \vartheta_1(v) = \frac{1}{4}\pi\lambda \mp \pi v_2 + \Re_e \ln \vartheta_1(v), \tag{50}$$

[1] Vgl. *W. Müller*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 287 f.

wenn wir jetzt $v = v_1 + i\,v_2$ setzen. Damit geht der Ausdruck für das Moment über in

$$M = \frac{1}{2}\frac{p\,a^2}{\pi}\left[\frac{1}{12}\pi\lambda - \ln\pi(1-q^{2n}) - \frac{\pi}{\lambda}(\eta^2+\eta_0^2) + \frac{1}{4}\,\Re_e \ln\vartheta_1(\zeta-\zeta_0)\,\vartheta_1(\zeta+\zeta_0)\,\vartheta_1(\zeta-\bar{\zeta}_0)\,\vartheta_1(\zeta+\bar{\zeta}_0)\right] \tag{51}$$

wo jetzt die Größen η und η_0 symmetrisch auftreten. Mit den Werten $\lambda = 1{,}5$ wird $q = 0{,}00898$, $(\pi/\lambda)\,\eta_0^2 = 0{,}5236$. Daher haben wir, wenn wir alle Konstanten zusammenfassen

$$M = \frac{1}{2}\frac{p\,a^2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\,\Re_e \ln\vartheta_1(\zeta-\zeta_0)\,\vartheta_1(\zeta+\zeta_0)\,\vartheta_1(\zeta-\bar{\zeta}_0)\,\vartheta_1(\zeta+\bar{\zeta}_0) - \frac{\pi}{\lambda}\eta^2 - 0{,}6159\right] = \frac{1}{2}\frac{p\,a^2}{\pi}\,c_m\,. \tag{52}$$

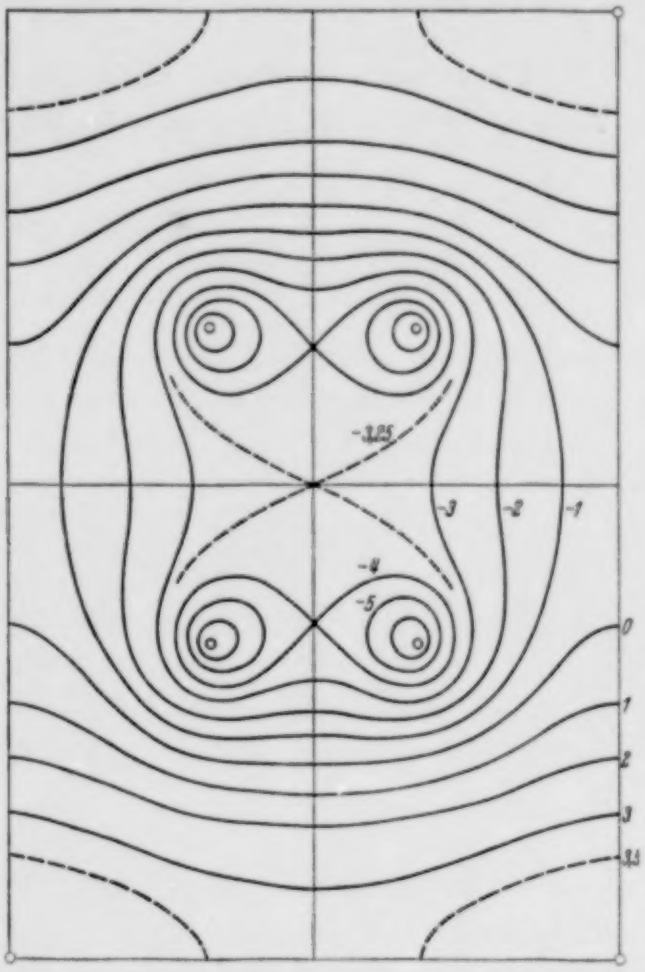

Abb. 8. Höhenlinien der Momentenfläche der querkraftfrei eingespannten Vierpilzplatte ($\lambda = 1{,}5$, $\xi_0 = 1/3$, $\eta_0 = 1/2$).

Wir haben Momentenzahlen für einige Werte von ξ und η in dem vierten Teil der Platte berechnet und in der Tabelle 3 zusammengestellt. Ferner haben wir in Abb. 8 die Höhenlinien der Momentenfläche gezeichnet. Dabei ist zu beachten, daß längs der Linie Null ein Übergang von posi-

Tabelle 3. *c_m-Werte der querkraftfrei eingespannten Vierpilzplatte.*

ξ \ η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75
0	0,284	0,267	0,233	0,152	0,077	0,014	—0,009	—0,055	—0,069
0,1	0,279	0,261	0,225	0,135	0,049	—0,021	—0,040	—0,077	—0,087
0,2	0,268	0,247	0,203	0,088	—0,041	—0,161	—0,139	—0,145	—0,141
0,3	0,255	0,231	0,174	0,035	—0,165	—0,512	—0,267	—0,213	—0,216
0,33	0,251	0,227	0,171	0,023	—0,196	$-\infty$	—0,299	—0,225	—0,227
0,4	0,244	0,219	0,162	0,012	—0,185	—0,393	—0,287	—0,234	—0,321
0,5	0,241	0,215	0,157	0,013	—0,152	—0,273	—0,255	—0,235	—0,232

tiven zu negativen Momenten stattfindet, entsprechend dem Wechsel zwischen konvexer und konkaver Krümmung, der Fläche. Die Zuordnung der M-Linien zu den Werten von c_m ist derart, daß die Linie mit der Nummer n der Wert n, 0,07095 zugehört. In den Eckpunkten der Platte ($\xi = \eta = 0$) haben wir die größten Werte $c_m = 0{,}2838$, in der Mitte der Platte ($\xi = 0{,}5$; $\eta = 0{,}75$) wird $c_m = -0{,}232$. Die vier Stützpunkte sind singuläre (Wirbel-)punkte im Felde der M-Linien, in denen das Moment negativ unendlich wird.

9. Schlußbemerkung. Die in der vorstehenden Arbeit angewendeten Grundsätze geben den Zugang zu mehreren Erweiterungen, auf die wir nur kurz hinweisen wollen. Zunächst kann der Fall der endlichen, rechteckigen Stützflächen ohne große Schwierigkeiten von dem anfangs gegebenen Ansatz aus weiter entwickelt werden, wobei es dann erforderlich ist, bei Behandlung der η-Reihen auf die Verschiedenheit z. B. der w-Funktionen in fünf verschiedenen Streifengebieten Rücksicht zu nehmen. Ferner liegt es nahe, die Untersuchung auch auf andere Fälle der Mehrpilzplatte, etwa auf die Neunpilzplatte auszudehnen, wozu alle Voraussetzungen gegeben sind. Der Verf. behält sich vor, auf einige dieser Probleme später zurückzukommen.

(Eingegangen am 30. Juni 1953.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *W. Müller*, München 9, Taubenstr. 2^{III}.

Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen. Von Dr. habil. **H. Bückner,** Berlin. (Ergebnisse der angewandten Mathematik, 1. Heft.) Mit 1 Textabbildung. VI, 127 Seiten. 1952. Steif geheftet DM 18.60

Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von **Herbert Buchholz,** a. pl. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt, wissenschaftlicher Mitarbeiter und Referent beim Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost. (Ergebnisse der angewandten Mathematik, 2. Heft.) Mit 9 Textabbildungen. XVI, 234 Seiten. 1953. Steif geheftet DM 36,—

Technische Hydro- und Aeromechanik. Von Dr.-Ing. habil. **Walther Kaufmann,** o. Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in München. Mit 254 Abbildungen. Etwa 416 Seiten. 1954. (In Vorbereitung.)

Hydraulik. Ihre Grundlagen und praktische Anwendung. Von o. Professor Dr. **Josef Kozeny,** Vorstand des Institutes für Hydraulik, Siedlungswasserwirtschaft, Verkehrswasserbau und landwirtschaftlichen Wasserbau an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 544 Textabbildungen. XI, 588 Seiten. 1953. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen DM 88,—

Gasdynamik. Von Dr. **Klaus Oswatitsch,** Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stockholm, früherer wissenschaftlicher Mitarbeiter am Kaiser-Wilhelm-(Max-Planck-)Institut für Strömungsforschung in Göttingen. Mit 300 Textabbildungen und 3 Tafeln. XIII, 456 Seiten. 1952. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen DM 78,—

Einführung in die theoretische Gasdynamik. Von Dr. **Robert Sauer,** o. Professor für Mathematik und analytische Mechanik an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage. Mit 107 Abbildungen. VIII, 174 Seiten. 1951. DM 16.50

Thermodynamische Grundlagen. Bearbeitet von Dr.-Ing. Dr. phil. nat. h. c. **Rudolf Plank,** o. Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe. (Handbuch der Kältetechnik. Hrsg. von R. Plank, Karlsruhe, 2. Band.) Mit 169 Abbildungen. XII, 384 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 48,—

Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches Subskriptionspreis DM 38,40

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einflußfelder elastischer Platten. Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. techn. **Adolf Pucher,** Graz. Mit 10 Textabbildungen und 52 Tafeln. VIII, 13 Seiten. Quer-4°. 1951. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen DM 27,70

Statik der rahmenartigen Tragwerke. Von Prof. Dr.-Ing. **J. Pirlet,** Köln, ehem. Honorarprofessor der Technischen Hochschule, Aachen. Mit 80 Abbildungen im Text und 5 Tafeln in einer Tasche. VII, 168 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 24,—

Fachwerk und Rahmenwerk. Ein systematischer Grundriß der Statik des ebenen Tragwerkes. Von Dr.-Ing. **Walter Fries.** Mit 365 Bildern. X, 368 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 42,—

Die metallischen Werkstoffe des Maschinenbaues. Von Dr.-Ing. **E. Bickel,** Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Mit 456 Abbildungen. X, 442 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 37,50

Kreiselgebläse und Kreiselverdichter radialer Bauart. Von Dr.-Ing. habil. **Friedrich Kluge** † VDI, VDEh, ASME, Olean, N. Y. (USA.). Mit 377 Abbildungen. XV, 301 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 58,50

Axialkompressoren und Radialkompressoren. Anwendung, Theorie, Berechnung. Von Dr.-Ing. **B. Eckert.** Unter Mitwirkung von Ing. E. Schnell. Mit 426 Abbildungen und 6 Rechentafeln. X, 441 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 73,50

Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen. Von Dr.-Ing. **Kurt Haug,** Lindau/Bodensee. (Konstruktionsbücher, 8./9. Band.) Mit 134 Abbildungen. V, 201 Seiten. 1952. DM 24,—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 3 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin·Göttingen·Heidelberg, bei

Springer-Verlag / Berlin·Göttingen·Heidelberg. Printed in Germany, W 57 275 4022 0,85 K. B./Z. 040